Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 150.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1920.

Steele.
2-8-1923

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 150.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 26. November.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1919

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 30 Mark.

Band 150. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Brandt, H., Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform . . . . . Seite 1

Jung, Heinrich W. E., Über algebraische Flächen . . . . . — 47

Faber, Georg, Über Tschebyscheffsche Polynome . . . . . — 79

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die fortdauernd steigenden Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 150. Bande ab auf M. 30.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Die Inanspruchnahme des größten Teils der Rohstoffe für die Papierfabrikation seitens der Heeresverwaltung hat die Kriegswirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10

Inhaltsverzeichnis des Bandes 150.

Seite

Bauer, Michael, Bemerkung über die Zusammensetzung der algebraischen Zahlkörper . . . . . 185—188

Brandt, H., Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform . . . . . 1— 46

Czuber, E., Der Mittelwert eines Quotienten . . . . . 175—179

Faber, Georg, Über Tschebyscheffsche Polynome . . . . . 79—106

Jung, Heinrich W. E., Über algebraische Flächen . . . . . 47— 78

Lukáçs, Franz, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe . . . . . 107—112

Olsson, Ol., Einige Anwendungen der hydrodynamischen Theorien von *Kirchhoff-Clebsch* . . . . . 113—156

Rella, Tonio, Über die multiplikative Darstellung von algebraischen Zahlen eines *Galois*schen Zahlkörpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers . . . . . 157—174

Rosanes, J., Bemerkungen zu der Aufgabe, eine quadratische Form als Summe von Quadraten linearer Formen darzustellen . . . . . 180—184

417445

Ausgabedaten der Hefte von Band 150.

Heft 1/2 ausgegeben am 26. November 1919.
Heft 3/4 ausgegeben am 15. Juni 1920.

Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform.

Von Herrn *H. Brandt* in Karlsruhe i. B.

Einleitung.

Die Theorie der Komposition der binären quadratischen Formen ist von *Gauß* in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden*). Wenn man von den Anwendungen absieht, so sind die Hauptpunkte dieser Theorie die beiden folgenden: 1. Lösung der Aufgabe, aus zwei Formen, deren Determinanten entweder gleich sind oder doch im Verhältnis zweier Quadrate stehen, eine zusammengesetzte Form zu finden. 2. Beweis des Fundamentalsatzes der Theorie, daß die Komposition der Formen auch eine Komposition der Formenklassen ist. Beide Punkte wurden von *Gauß* vollständig unter den allgemeinsten Voraussetzungen erledigt.

In art. 236 löst *Gauß* die erste und in art. 239 (vgl. auch art. 249) die zweite Aufgabe unter wesentlicher Benutzung der in die Komposition eingehenden bilinearen Substitution. Bei späteren Anwendungen in art. 242 und 243 zeigt sich aber das überraschende Resultat, daß die komponierte Form in sehr vielen Fällen aus den beiden gegebenen in einfacher Weise allein durch Kongruenzen ohne Benutzung der bilinearen Substitution bestimmt werden kann.

*) *C. Fr. Gauß*, Disquisitiones arithmeticae art. 234—251, Werke Bd. 1, S. 239 ff.

An dieses Resultat knüpft *Arndt* an*) und zeigt, daß das auch im allgemeinsten Fall möglich ist, daß somit zur Lösung der ersten Aufgabe die bilineare Substitution ganz entbehrt werden kann. Jedoch vermochte *Arndt* von seinem Standpunkt aus nicht einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes zu erbringen, wie aus den Schlußworten seiner Arbeit zu entnehmen ist. Das war von verwandten Gesichtspunkten aus *Dirichlet***) gelungen, jedoch nur für den Fall der Komposition eigentlich primitiver Formen der gleichen (nicht quadratischen) Determinante; auch ist sein Beweis von der bilinearen Substitution nicht ganz unabhängig.

Die übrigen Arbeiten aus der Kompositionstheorie***), unter denen namentlich die von *Dedekind* und *Weber* zu nennen sind, stellen die bilineare Substitution in den Vordergrund der Betrachtung und sind für das Folgende nicht von Interesse.

Wir geben hier eine neue Begründung der Kompositionstheorie unter Beschränkung auf den wichtigsten Fall der Komposition von Formen mit gleicher Diskriminante und zueinander primen Teilern. Dabei stützen wir uns lediglich auf lineare Substitutionen und lösen die beiden obigen Aufgaben unter der eben genannten Einschränkung ohne Benutzung der bilinearen Substitution. Diese Herleitung ist nicht nur an sich von Interesse, weil sie die *Gauß*sche Theorie in einem neuen Lichte erscheinen läßt, sondern sie führt auch zu einer Verallgemeinerung des Begriffs der Komposition, der dadurch weitreichender wird, ohne doch seine wesentlichen Eigenschaften einzubüßen.

Um eine Vorstellung von dem eingeschlagenen Wege zu geben, bemerken wir folgendes. Unter den Formen von der Diskriminante D gibt es eine sogenannte Hauptform $\eta = (1, \varepsilon, -d)$†), wo $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon^2 + 4d = D$ ist. Ist dann $\varphi = (a, b, c)$†) eine beliebige Form derselben Diskriminante $b^2 - 4ac = D$ und m eine eigentlich durch sie darstellbare

---

*) *F. Arndt*, Zur Komposition der quadratischen Formen, Journal für Mathematik Bd. 56 (1859), S. 64.

**) *L. Dirichlet*, De formarum binariarum secundi gradus compositione. Berlin 1851 oder Journal für Mathematik Bd. 47 (1854), S. 155 oder Werke Bd. 2, S. 105.

***) Vgl. Enzyklopädie I 2, S. 608.

†) (a, b, c) bezeichnet abweichend von *Gauß* die Form $ax^2 + bxy + cy^2$.

Zahl, so gibt es stets Substitutionen $\left\|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right\|$ von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = m$, die die Hauptform η in das m-fache der Form φ transformieren. Eine solche Substitution nennen wir eine die Form φ *erzeugende Substitution.* Auf diese erzeugenden Substitutionen gründen wir die Kompositionstheorie. Sind φ, φ' zwei Formen mit gleicher Diskriminante und zueinander primen Teilern, so kann man aus irgend zwei beziehungsweise die Formen φ, φ' erzeugenden Substitutionen stets gewisse dritte Substitutionen bestimmen, die eine aus φ und φ' im *Gauß*schen Sinne komponierte Form φ'' erzeugen.

Nun kann aber an Stelle der Hauptform η eine beliebige primitive Form χ derselben Diskriminante treten. Auch dann gibt es Substitutionen, die die Form χ — wir nennen sie *Grundform* — in das m-fache einer beliebig gegebenen Form φ transformieren, wo m die Determinante der Substitution ist (aber im allgemeinen nicht mehr eine durch φ eigentlich darstellbare Zahl sein wird). Wir nennen sie *zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitutionen.* Sind wieder φ, φ' zwei Formen mit der Diskriminante D und zueinander primen Teilern, so kann man aus irgend zwei zur Grundform χ gehörigen, sie erzeugenden Substitutionen in ähnlicher Weise wie oben gewisse dritte Substitutionen bestimmen, welche Formen φ'' erzeugen, die wir *aus φ und φ' in bezug auf die Grundform χ komponiert* nennen.

Auch für die Komposition relativ einer beliebigen primitiven Grundform gilt der Fundamentalsatz von der Komposition der Formenklassen. Um die Gesetze der Klassenkomposition darzustellen, bedient man sich zweckmäßig einer Symbolik, die sich an die von *Gauß* verwendete anschließt*). Bemerkenswert ist dasjenige Gesetz, welches den Übergang zu einer neuen Grundklasse regelt. Beschränkt man sich auf primitive Klassen, so ist es einer sehr einfachen geometrischen Interpretation fähig. Die primitiven Klassen derselben Diskriminante lassen sich nämlich in periodischer Wiederholung den Gitterpunkten (d. h. Punkten mit ganzzahligen kartesischen Koordinaten) eines ein- oder mehrdimensionalen Raumes derart zuordnen, daß die Addition der Vektoren

*) Disq. arith. art. 249 und 305 ff.

von einem festen Gitterpunkt aus die Gesetze der Komposition relativ derjenigen Grundklasse zum Ausdruck bringt, die dem festen Gitterpunkt entspricht, wie dieser Gitterpunkt oder die entsprechende Grundklasse auch gewählt sein mag.

Was nun den Algorithmus anbetrifft, durch den zwei zu derselben Grundform gehörigen erzeugenden Substitutionen gewisse dritte erzeugende Substitutionen zugeordnet werden, so wird dieser im folgenden nicht in voller Allgemeinheit entwickelt, sondern nur unter Beschränkung auf den Fall, daß die beiden gegebenen Substitutionen zueinander prime Determinanten haben. Einmal wird durch diese Einschränkung, die sich übrigens nur auf die Substitutionen, nicht aber auf die Formen bezieht, eine große Vereinfachung erzielt. Es findet nämlich der bemerkenswerte Umstand statt, daß in diesem Falle (und übrigens auch nur in diesem Falle) der fragliche Algorithmus von der Grundform ganz unabhängig wird, so daß die gesuchten dritten erzeugenden Substitutionen allein durch die beiden gegebenen schon vollständig bestimmt sind. Doch würde die dadurch entstehende Vereinfachung die gemachte Einschränkung allein nicht rechtfertigen, wenn nicht gleichzeitig wegen desselben Umstandes der Algorithmus aus dem zunächst für ihn gesetzten Rahmen der Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen herausgerückt und von weit allgemeinerem Interesse würde.

Es zeigt sich nämlich, daß er überhaupt auf irgend zwei Substitutionen mit zueinander primen Determinanten angewandt werden kann, sich leicht auf Substitutionen mit beliebiger Variabelnzahl ausdehnen läßt und überhaupt für die Zahlentheorie der Substitutionen von fundamentaler Bedeutung ist. Wegen der großen Ähnlichkeit, die dieser Algorithmus mit der gewöhnlichen Zusammensetzung oder Komposition der Substitutionen hat, haben wir dafür den Namen *Kongruenzkomposition* gewählt und nennen eine durch Anwendung dieses Begriffes entstehende Substitution aus den beiden gegebenen *kongruent komponiert.* Dabei weist das Wort „kongruent“ schon auf die rein zahlentheoretische Bedeutung hin und bringt gleichzeitig die mit dem Begriff verbundene Vieldeutigkeit zum Ausdruck, die erst von einem höhern Standpunkt aus zur Eindeutigkeit wird. Die Kongruenzkomposition ist wesentlich kommutativ. Sie fällt, wenn die beiden gegebenen Substitutionen vertauschbar sind, mit der ge-

wöhnlichen Komposition zusammen und tritt bei den in Betracht kommenden Problemen an ihre Stelle, wenn das nicht der Fall ist. Um ein Beispiel weitgehender Anwendung dieses Begriffes zu geben, bemerken wir, daß, wenn in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mit zueinander primen Normen je durch eine Basis gegeben sind und die Basen vermöge ganzzahliger linearen Substitutionen durch eine Körperbasis ausgedrückt werden, jede aus beiden Substitutionen kongruent komponierte Substitution die Körperbasis in die Basis eines Ideals $\mathfrak{c}$ transformiert, das gleich dem Produkt aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist.

Mit der Herleitung des Begriffs der Kongruenzkomposition beschäftigt sich das erste Kapitel. Wir beginnen mit einigen Hilfssätzen aus der Zahlentheorie der linearen Subsitutionen und wenden uns dann dazu, den Teilbarkeitsbegriff zu übertragen. Dabei ist naturgemäß der Komplikation Rechnung zu tragen, die dadurch entsteht, daß die Zusammensetzung der Substitutionen nicht kommutativ ist. Die konsequente Durchführung der Übertragung führt zu einer Erweiterung des Kongruenzbegriffs, d. h. zur Betrachtung von Kongruenzen, deren Moduln Substitutionen sind. Im Kreise dieser Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, eine Gesamtheit von Substitutionen, die untereinander sowohl links- wie rechtsseitig äquivalent sind, in einem Begriff zu vereinigen. Wir bezeichnen eine solche Gesamtheit als *Schar*. Die Kongruenzkomposition wird in den Scharen eindeutig und kann geradezu als die Multiplikation der Scharen bezeichnet werden.

Das zweite Kapitel ist den erzeugenden Substitutionen gewidmet. Es gibt ihre Definition und teilt einige Sätze darüber mit, die später gebraucht werden. Ferner wird der Begriff der hemiautomorphen Substitution einer Form φ eingeführt, der sich für die Grundform χ mit dem Begriff der die Grundform selbst wieder erzeugenden Substitution deckt. Zuletzt werden die Bedingungen dafür angegeben, daß zwei erzeugende Substitutionen äquivalente Formen erzeugen.

Das dritte Kapitel bringt den Begriff der Komposition relativ einer Grundform und den Beweis des Fundamentalsatzes.

Das vierte Kapitel zeigt, daß die Gesetze der Komposition der Formenklassen denen der *Gauß*schen Theorie vollständig analog sind.

Das letzte Kapitel endlich gibt die Regel, nach der sich die kom-

ponierte Klasse beim Übergang zu einer neuen Grundklasse ändert, und ihre schon oben erwähnte geometrische Deutung für primitive Klassen.

Der Schluß enthält einen Ausblick auf verwandte Probleme.

1. Kapitel. Der Begriff der Kongruenzkomposition.

1. *Bezeichnungen:* Wir bezeichnen eine lineare Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

kurz durch $\left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$ oder auch durch einen einzigen Buchstaben S und setzen stets voraus, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die der Reihe nach der erste bis vierte Koeffizient von S heißen, ganze (rationale) Zahlen sind und daß die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = |S|$ nicht verschwindet.

Neben S betrachten wir bisweilen die Substitutionen $\left\| \begin{matrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{matrix} \right\| = \dot{S}$ und $\left\| \begin{matrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{matrix} \right\| = \bar{S}$, die offenbar beide dieselbe Determinante wie S haben.

Außer S sollen auch die Buchstaben T, U zur Bezeichnung von Substitutionen Verwendung finden, dabei bedeute U stets eine unimodulare Substitution, d. h. eine solche, deren Determinante $|U| = 1$ ist. Speziell werde noch die Substitution mit den Koeffizienten 1, 0, 0, m durch M und die identische Substitution mit den Koeffizienten 1, 0, 0, 1 durch E bezeichnet.

Auf die Substitutionen lassen sich die rationalen Rechenoperationen ausdehnen. Dabei muß man allerdings beachten, daß für die Multiplikation, d. h. die Zusammensetzung der Substitutionen, das kommutative Gesetz nicht gültig ist. Man gelangt so zu einer Algebra der Substitutionen, aus der die einfacheren Sätze im folgenden vorausgesetzt werden.

2. *Definitionen.* Eine Substitution S heißt *durch m teilbar* oder auch *kongruent Null nach dem Modul m* kurz *nach m (L)*, in Zeichen $S \equiv 0, (m)$, wenn alle Koeffizienten von S durch m teilbar sind.

Zwei Substitutionen S, S' heißen *einander kongruent nach m*, in Zeichen $S \equiv S', (m)$, wenn $S - S' \equiv 0, (m)$.

Eine Substitution S heißt *primitiv*, wenn ihre Koeffizienten keinen gemeinsamen Teiler haben, im andern Fall *imprimitiv*.

Eine Substitution S heißt *nach (dem Modul) m primitiv*, wenn der größte gemeinsame Teiler ihrer Koeffizienten zu m prim ist.

Z. B. ist $\left\|\begin{matrix}6&3\\0&9\end{matrix}\right\| \equiv 0$, (3); $\left\|\begin{matrix}3&-1\\1&3\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}8&-6\\6&-2\end{matrix}\right\|$, (5); und es ist $\left\|\begin{matrix}3&-1\\1&3\end{matrix}\right\|$ eine primitive und $\left\|\begin{matrix}8&-6\\6&-2\end{matrix}\right\|$ eine imprimitive, jedoch nach 5 primitive Substitution.

3. *Hilfssätze. Satz I. Hat die primitive Substitution S die Determinante m und hat M die obengenannte Bedeutung, so kann man stets zwei unimodulare Substitutionen U, U_1 bestimmen, so daß $S = U M U_1$ ist.*

Dieser bekannte Satz spielt überall, wo es sich um ganzzahlige Substitutionen handelt, also auch im folgenden, eine wichtige Rolle.

Satz II. Zu jeder nach m primitiven Substitution S_1 läßt sich eine nach dem Modul m kongruente primitive Substitution S bestimmen.

Dieser Satz ist eine Folgerung der leicht zu erweisenden Tatsache, daß man zu beliebig vielen ganzen Zahlen, deren gemeinsamer Teiler zu m prim ist, nach dem Modul m entsprechend kongruente bestimmen kann, die überhaupt keinen gemeinsamen Teiler haben.

Satz III. Wenn die Determinante einer nach m primitiven Substitution S_1 durch m teilbar ist, so gibt es eine ihr nach dem Modul m kongruente Substitution, deren Determinante gleich m ist.

Ist nämlich $S' \equiv S_1$, (m) eine primitive Substitution (Satz II) von der Determinante m', so kann man (Satz I) zwei unimodulare Substitutionen U, U_1 bestimmen, so daß $S' = UM'U_1$. Da aber m' durch m teilbar sein muß, also $M' \equiv M$, (m), so genügt die Substitution $S = U M U_1$ den verlangten Bedingungen.

Satz IV. Wenn die Determinante einer Substitution S_1 der Bedingung $|S_1| \equiv 1$, (m) genügt, so gibt es eine ihr nach dem Modul m kongruente Substitution U, deren Determinante gleich 1 ist.

Der Beweis ergibt sich ähnlich; man hat im vorigen Beweis nur M durch die identische Substitution E zu ersetzen.

Satz V. Sind U, U′ zwei unimodulare Substitutionen und m, m′ irgend zwei zueinander prime Zahlen, so kann man stets eine unimodulare Substitution U″ bestimmen, die den beiden Kongruenzen $U'' \equiv U$, (m) und $U'' \equiv U'$, (m') genügt.

Da nämlich die Determinante jeder diesen Kongruenzen genügenden Substitution nach dem Modul mm' kongruent 1 ist, so ergibt sich die Existenz einer unimodularen, diesen Kongruenzen genügenden Substitution nach dem vorigen Satz.

4. Wenn zwischen drei Substitutionen S, S', S'' die Gleichung $S'' = SS'$ besteht, so nennen wir S einen *Linksteiler* von S'' und gleichzeitig S'' ein *Linksvielfaches* von S und schreiben dafür $S'' \overset{\cdot}{\equiv} 0$, (S); lies: *S'' links kongruent Null nach dem Modul S* oder kurz *nach S*. Da $\bar{S}S'' = mS'$, wo $m = |S|$, so ist jeder dieser drei Ausdrucksweisen das Bestehen der gewöhnlichen Kongruenz $\bar{S}S'' \equiv 0$, (m), die im folgenden als *Kriterium der linksseitigen Teilbarkeit* dient, vollständig gleichwertig. Sind U, U_1 unimodulare Substitutionen, so folgt aus $S'' \overset{\cdot}{\equiv} 0$, (S) auch $US''U_1 \overset{\cdot}{\equiv} 0$, (USU_1), weil $\bar{U}_1\bar{S}\bar{U}US''U' = \bar{U}_1\bar{S}S''U_1 \equiv 0$, (m) ist. (Die Folgerung würde sogar richtig sein, wenn U eine beliebige Substitution wäre.)

Wenn $S'' = SS'$, nennen wir ebenso S' einen *Rechtsteiler* von S'' und gleichzeitig S'' ein *Rechtsvielfaches* von S' und schreiben dafür $S'' \overset{\cdot}{\equiv} 0$, (S'); lies: *S'' rechts kongruent Null nach dem Modul S'* oder kurz *nach S'*. Da $S''\bar{S}' = m'S$, wo $m' = |S'|$, so ist jeder dieser drei Ausdrucksweisen das Bestehen der gewöhnlichen Kongruenz $S''\bar{S}' \equiv 0$, (m'), die im folgenden als *Kriterium der rechtsseitigen Teilbarkeit* dient, vollständig gleichwertig. Sind U, U_1 unimodulare Substitutionen, so folgt aus $S'' \overset{\cdot}{\equiv} 0$, (S') auch $US''U_1 \overset{\cdot}{\equiv} 0$, $(US'U_1)$, weil $US''U_1\bar{U}_1\bar{S}'\bar{U} = US''\bar{S}'\bar{U} \equiv 0$, (m') ist. (Die Folgerung würde sogar richtig sein, wenn U_1 eine beliebige Substitution wäre.)

Zum Unterschiede von den gewöhnlichen oder *skalaren Kongruenzen* bezeichnen wir Kongruenzen, deren Moduln Substitutionen sind, als *symbolische Kongruenzen*.

Beispiel: Wegen $\left\| \begin{matrix} 3 & -5 \\ -2 & 7 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -28 & -27 \\ 48 & 40 \end{matrix} \right\|$ ist $\left\| \begin{matrix} 3 & -5 \\ -2 & 7 \end{matrix} \right\|$ ein Linksteiler, $\left\| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{matrix} \right\|$ ein Rechtsteiler von $\left\| \begin{matrix} -28 & -27 \\ 48 & 40 \end{matrix} \right\|$; und diese Substitution ist ein Linksvielfaches von $\left\| \begin{matrix} 3 & -5 \\ -2 & 7 \end{matrix} \right\|$ und ein Rechtsvielfaches von $\left\| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{matrix} \right\|$. Es bestehen also die symbolischen Kongruenzen

$$\left\|\begin{matrix}-28 & -27\\ 48 & 40\end{matrix}\right\| \equiv\!\!\equiv 0 \left(\left\|\begin{matrix}3 & -5\\ -2 & 7\end{matrix}\right\|\right) \text{ und } \left\|\begin{matrix}-28 & -27\\ 48 & 40\end{matrix}\right\| \doteq 0, \left(\left\|\begin{matrix}4 & 1\\ 8 & 6\end{matrix}\right\|\right),$$

denen die beiden skalaren

$$\left\|\begin{matrix}7 & 5\\ 2 & 3\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}-28 & -27\\ 48 & 40\end{matrix}\right\| \equiv 0, \ (11) \quad \text{und} \quad \left\|\begin{matrix}-28 & -27\\ 48 & 40\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}6 & -1\\ -8 & 4\end{matrix}\right\| \equiv 0, \ (16)$$

entsprechend gleichwertig sind.

5. Genügt die Substitution S' gleichzeitig den beiden symbolischen Kongruenzen $S' \equiv\!\!\equiv 0, (S)$ und $S' \doteq 0, (S)$, so soll S ein *beiderseitiger Teiler* von S' und S' ein *beiderseitiges Vielfaches* von S heißen, und wir schreiben dafür die *symbolische Doppelkongruenz* $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$, lies: *$S'$ links und rechts kongruent* Null oder *S' doppelt kongruent* Null nach S. Sind U, U_1 unimodulare Substitutionen, so folgt aus $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$ nach dem vorigen auch $U S' U_1 \doteq\!\!\equiv 0, (U S U_1)$.

Als Kriterium für das Stattfinden der Doppelkongruenz $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$ können die Kriterien der links- und rechtsseitigen Teilbarkeit zusammen benutzt werden. Doch ist namentlich für Zahlenbeispiele auch der folgende Satz nützlich.

Satz VI. Ist S eine primitive Substitution, so ist die symbolische Doppelkongruenz $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$ vollständig gleichwertig einer skalaren Kongruenz $S' \equiv \mu S, (m)$, wo μ eine ganze Zahl bedeutet und $m = |S|$ ist.

Daß aus $S' \equiv \mu S, (m)$ auch $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$ folgt, lehren die Kriterien der links- und rechtsseitigen Teilbarkeit. Daß aber auch umgekehrt, wenn $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$, eine ganze Zahl μ gefunden werden kann, so daß $S' \equiv \mu S, (m)$, erkennt man folgendermaßen. Schreibt man S nach Satz I in der Gestalt $S = U M U_1$ und setzt $S' = U S_1 U_1$, so ist S_1 eine ganzzahlige Substitution. Aus $S' \doteq\!\!\equiv 0, (S)$ folgt aber $\overline{U} S' \overline{U}_1 \doteq\!\!\equiv 0, (\overline{U} S \overline{U}_1)$, d. h. $S_1 \doteq\!\!\equiv 0, (M)$. S_1 kann aber nur dann ein beiderseitiges Vielfaches von M sein, wenn es die Gestalt $\left\|\begin{matrix}\mu & \nu m\\ \varrho m & \sigma m\end{matrix}\right\|$ hat, wo $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ ganze Zahlen sind, wenn also $S_1 \equiv\!\!\equiv \mu M, (m)$ ist. Aus $S_1 \equiv\!\!\equiv \mu M, (m)$ folgt aber sogleich $U S_1 U_1 \equiv\!\!\equiv \mu U M U_1$, d. h. $S' \equiv\!\!\equiv \mu S, (m)$.

Beispiel: Wegen $\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|$ ist $\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{matrix}\right\| \doteq 0, \left(\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|\right)$, und in der Tat findet man $\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{matrix}\right\| \equiv 2 \left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\|, (5)$.

6. Ist $S' \equiv\!\!\equiv 0, (S)$ und $|S'| = |S|$, also $S' = SU$ und demnach $S = S' \overline{U}$, so heißen S, S' *rechts äquivalent*, in Zeichen $S \backsim S'$.

Die Gesamtheit der Substitutionen S', die S rechts äquivalent sind, bildet mit S eine *Rechtsklasse*.

Ist $S' \equiv 0$, (S) und $|S'| = |S|$, also $S' = US$ und demnach $S = \overline{U}S'$, so heißen S, S' *links äquivalent*, in Zeichen $S \sim S'$.

Die Gesamtheit der Substitutionen, die S links äquivalent sind, bildet mit S eine *Linksklasse*.

Aus diesen Definitionen und den obigen Teilbarkeitskriterien folgen die beiden *Äquivalenzkriterien*: Es ist $S \sim S'$, wenn $|S| = |S'| = m$ und $\overline{S}S' \equiv 0$, (m), und es ist $S \sim S'$, wenn $|S| = |S'| = m$ und $S'\overline{S} \equiv 0, (m)$.

Beispiel: Es ist $\left\|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -11 & 8 \end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 4 & 15 \\ 1 & 7 \end{matrix}\right\|$; und im ersten Fall sind die Bedingungen $3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \cdot 11 = 11$ und $\left\|\begin{matrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -11 & 8 \end{matrix}\right\| \equiv 0, (11)$ und im zweiten Fall die Bedingungen $2 \cdot 7 - 1 \cdot 1 = 4 \cdot 7 - 15 \cdot 1 = 13$ und $\left\|\begin{matrix} 4 & 15 \\ 1 & 7 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 7 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right\| \equiv 0$, (13) erfüllt.

7. Ist gleichzeitig $S \sim S'$ und $S \sim S'$, so schreiben wir $S \sim S'$, lies: *S links und rechts äquivalent S'* oder *S doppelt äquivalent S'*.

Als Kriterium für das Stattfinden der Doppeläquivalenz können die beiden obigen Äquivalenzkriterien zusammen benutzt werden. Darnach ist $S \sim S'$, wenn $|S| = |S'| = m$ und $\overline{S}S' \equiv S'\overline{S} \equiv 0$, (m). Doch ist bisweilen auch der nächste Satz nützlich, der aus Satz VI folgt.

Satz VII. Zwei primitive Substitutionen S, S' sind dann und nur dann doppelt äquivalent, wenn $|S| = |S'| = m$ und eine ganze zu m prime Zahl μ existiert, so daß die Kongruenz $S' \equiv \mu S$, (m) besteht.

Offenbar ist diese Bedingung nur scheinbar unsymmetrisch.

Alle Substitutionen S', die der Substitution S doppelt äquivalent sind, fassen wir mit S unter dem Begriff einer *Schar* zusammen. Alle Substitutionen einer Schar gehören zu einer bestimmten Rechts- und zu einer bestimmten Linksklasse, so daß wir auch kurz sagen können: Jede Schar gehört zu einer bestimmten Rechts- und einer bestimmten Linksklasse *).

---

*) Ist umgekehrt bei Substitutionen mit gleichen Elementarteilern irgend eine Links- und irgend eine Rechtsklasse vorgeschrieben, so gibt es stets eine eindeutig bestimmte Schar, die beiden Klassen angehört. Nennt man Klassen und Scharen primitiver Substitutionen selbst primitiv und ist $\psi(m)$ die Anzahl der primitiven Rechts- oder Linksklassen von der Determinante m, so ist also $[\psi(m)]^2$ die Anzahl der primitiven Scharen von der Determinante m.

Beispiel: Die beiden Substitutionen $\left\|\begin{matrix}2&1\\1&4\end{matrix}\right\|$ und $\left\|\begin{matrix}-1&3\\-4&5\end{matrix}\right\|$ sind doppelt äquivalent; denn man hat $\left\|\begin{matrix}-1&3\\-4&5\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}2&1\\1&4\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}0&1\\-1&1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-1&1\\-3&2\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}2&1\\1&4\end{matrix}\right\|$, und in der Tat ist $\left\|\begin{matrix}-1&3\\-4&5\end{matrix}\right\| \equiv 3 \left\|\begin{matrix}2&1\\1&4\end{matrix}\right\|$, (7).

8. *Definition. Sind S, S' zwei Substitutionen mit zueinander primen Determinanten, so heißt jede Substitution S'' mit der Determinante $|S''| = |S||S'|$, die den beiden symbolischen Kongruenzen $S'' \doteqdot 0$, (S) und $S'' \doteqdot 0$, (S') genügt, aus S und S' kongruent komponiert oder durch Kongruenzkomposition aus S und S' entstanden.*

Die kongruent komponierte Substitution ist also ein Links- und ein Rechtsvielfaches von S sowohl wie von S'.

Es genügt, die Existenz der kongruent komponierten Substitution S'' unter der Annahme zu beweisen, daß S, S' primitive Substitutionen sind. In der Tat, wäre diese Annahme nicht erfüllt, so könnte man $S = \mu S_1$, $S' = \mu' S_1'$ setzen, wo S_1 und S_1' primitive Substitutionen sind. Ist dann S_1'' aus S_1 und S_1' kongruent komponiert, so ist offenbar $S'' = \mu\mu' S_1''$ aus $S = \mu S_1$ und $S' = \mu' S_1'$ kongruent komponiert.

Sind aber S, S' primitive Substitutionen und setzt man $|S| = m$, $|S'| = m'$, so kann man S, S' nach Satz I in der Gestalt $S = UMU_1$, $S' = U'M'U_1'$ darstellen. Da m zu m' prim ist, lassen sich nach Satz V zwei unimodulare Substitutionen U'', U_1'' bestimmen, die den Kongruenzen

$$\begin{aligned} U'' &\equiv U, \ (m) & U_1'' &\equiv U_1, \ (m) \\ &\equiv U', \ (m') & &\equiv U_1', \ (m'). \end{aligned}$$

genügen. Setzt man noch $M'' = MM' = M'M$, so ist $S'' = U''M''U_1''$ aus S und S' kongruent komponiert; denn es ist $|S''| = |S||S'|$, und es bestehen zufolge unserer Festsetzungen die Kongruenzen

$$\overline{S}S'' \equiv S''\overline{S} \equiv 0, \ (m) \text{ und } \overline{S}'S'' \equiv S''\overline{S}' \equiv 0, \ (m'),$$

d. h. es ist $S'' \doteqdot 0$, (S) und $S'' \doteqdot 0$, (S')*).

---

*) Dieser Beweis und damit der Begriff der Kongruenzkomposition läßt sich auf Substitutionen mit beliebiger Variabelnzahl ausdehnen. Dabei tritt an Stelle von M das System der Elementarteiler und an Stelle von m der letzte Elementarteiler.

Beispiel: Aus den Substitutionen $\left\|\begin{matrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{matrix}\right\|$ und $\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 9 & -1\end{matrix}\right\|$ mit den Determinanten 5 und 7 ist die Substitution $\left\|\begin{matrix}3 & 2\\ -4 & 9\end{matrix}\right\|$ mit der Determinante $35 = 5 \cdot 7$ kongruent komponiert; denn es ist

$$\left\|\begin{matrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}3 & 2\\ -4 & 9\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}3 & 2\\ -4 & 9\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{matrix}\right\| \equiv 0, \ (5)$$

$$\left\|\begin{matrix}-1 & 1\\ -9 & 2\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}3 & 2\\ -4 & 9\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}3 & 2\\ -4 & 9\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}-1 & 1\\ -9 & 2\end{matrix}\right\| \equiv 0, \ (7).$$

9. Der vorstehende Beweis gibt gleichzeitig einen Weg an, um aus zwei gegebenen Substitutionen S, S' eine kongruent komponierte Substitution S'' wirklich zu finden. Doch ist dieser Weg ziemlich mühsam, was hauptsächlich darin begründet liegt, daß man von dem Satz I viermal Gebrauch machen muß, nämlich außer für S, S' auch für die Herstellung von U'', U_1''. Weit einfacher kommt man mit Hilfe des folgenden Satzes zum Ziel.

Satz VIII. Sind S, S' zwei primitive Substitutionen mit den zueinander primen Determinanten $|S| = m$, $|S'| = m'$, und sind μ, μ' irgend zwei beziehungsweise zu m, m' prime Zahlen, so kann man stets Substitutionen S'' von der Determinante $|S''| = m'' = mm'$ bestimmen, die den beiden Kongruenzen genügen

$$S'' \equiv \mu S, \ (m) \qquad S'' \equiv \mu' S', \ (m').$$

Zunächst kann man nämlich eine Substitution S_1'' bestimmen, für die die beiden Kongruenzen

$$S_1'' \equiv \mu S, \ (m) \qquad S_1'' \equiv \mu' S', \ (m')$$

erfüllt sind, weil m zu m' prim ist. Da aber die Substitution S_1'' wegen der Voraussetzungen des Satzes nach m wie nach m', also auch nach $m'' = mm'$ primitiv ist und die Determinante von S_1'' sowohl durch m wie durch m', also auch, da m prim zu m', durch mm' teilbar ist, so folgt nach Satz III die Existenz einer Substitution $S'' \equiv S_1''$, (m''), für die $|S''| = m''$ ist, also die Richtigkeit unserer Behauptung.

Jede den Bedingungen dieses Satzes genügende Substitution S'' ist aus S und S' kongruent komponiert, weil $|S''| = |S|\,|S'|$ und die skalaren Kongruenzen

$$\bar{S} S'' \equiv S'' \bar{S} \equiv 0, \ (m) \qquad \bar{S}' S'' \equiv S'' \bar{S}' \equiv 0, \ (m')$$

erfüllt sind, die den beiden symbolischen Kongruenzen

$$S'' \doteqdot 0, \ (S) \qquad S'' \doteqdot 0, \ (S')$$

gleichbedeutend sind. Umgekehrt können aber auch für jede aus den primitiven Substitutionen S, S' mit den zueinander primen Determinanten m, m' kongruent komponierte Substitution S'' zwei Zahlen μ, μ' bestimmt werden, so daß

$$S'' \equiv \mu S, \ (m) \qquad S'' \equiv \mu' S', \ (m').$$

Dies folgt nach der Definition des Begriffs der Kongruenzkomposition aus dem Satz VI. Dabei ist aber μ zu m, μ' zu m' prim; denn schreibt man $S'' = ST'$, was wegen $S'' \doteqdot 0$, (S) gestattet ist, so hat man $|T'| = m'$, und aus $ST' \equiv \mu S$, (m) folgt $m'S \equiv \mu S\bar{T}'$, (m). Da aber $m'S$ nach m primitiv ist, muß μ zu m prim sein. Ähnlich schließt man, daß μ' zu m' prim ist.

Wir fassen das Ergebnis in dem folgenden Satz zusammen.

Satz IX. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß aus den primitiven Substitutionen S, S' mit den zueinander primen Determinanten m, m' eine Substitution S'' mit der Determinante mm' kongruent komponiert ist, bestehen in der Existenz zweier beziehungsweise zu m, m' primen Zahlen μ, μ', für welche

$$S'' \equiv \mu S, \ (m) \qquad S'' \equiv \mu' S', \ (m').$$

Dieser Satz hätte also auch zur Definition des Begriffs der Kongruenzkomposition benutzt werden können; doch würde diese Definition nur für Substitutionen mit zwei Variabeln und auch nur für primitive Substitutionen gelten.

Beispiel: Für das Beispiel der vorigen Nummer hat man

$$\left\| \begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 9 \end{matrix} \right\| \equiv 3 \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\|, \ (5)$$

$$\equiv 5 \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 9 & -1 \end{matrix} \right\|, \ (7).$$

10. Eine charakteristische Eigenschaft einer kongruent komponierten Substitution, die auch für imprimitive Substitutionen (sogar mit beliebiger Variabelnzahl) gültig ist, spricht der folgende Satz aus.

Satz X. Ist S'' aus S und S' kongruent komponiert, so gibt es zwei unimodulare Substitutionen U, U', so daß $S'' = SUS' = S'U'S$, und ist umgekehrt diese Doppelgleichung für zwei Substitutionen S, S' mit zueinander

primen Determinanten und für zwei unimodulare Substitutionen U, U' erfüllt, so ist S'' aus S und S' kongruent komponiert.

Der erste Teil der Behauptung ergibt sich, wenn man setzt

$$U = \frac{1}{mm'} \bar{S} S'' \bar{S}' \qquad U' = \frac{1}{mm'} \bar{S}' S'' \bar{S},$$

wo $m = |S|$, $m' = |S'|$; denn diese beiden Substitutionen haben die Determinante 1 und sind ganzzahlig, da die beiden Substitutionen $\bar{S} S'' \bar{S}'$ und $\bar{S}' S'' \bar{S}$ durch m und durch m', also auch, da m prim zu m', durch mm' teilbar sind, wie aus der Definition des Begriffs der Kongruenzkomposition (Nr. 8) unter Benutzung der Kriterien der links- und rechtsseitigen Teilbarkeit (Nr. 4) folgt.

Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, daß wegen

$$S'' = S U S' = S' U' S$$

S'' ein beiderseitiges Vielfaches von S und S', und $|S''| = |S|\,|S'|$ ist.

Der Satz läßt erkennen, daß die gewöhnliche Zusammensetzung der Substitutionen in der Kongruenzkomposition enthalten ist, wenn die beiden gegebenen Substitutionen miteinander vertauschbar sind.

Beispiel: Es ist für das oben benutzte Beispiel

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -1 \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

11. Die aus S und S' kongruent komponierte Substitution S'' ist nicht eindeutig bestimmt; doch gehören alle aus S und S' kongruent komponierten Substitutionen derselben Schar an. Das zeigt der folgende Satz.

Satz XI. Wenn aus S und S' die Substitution S'', aus S_1 und S_1' die Substitution S_1'' kongruent komponiert und $S \doteq S_1$, $S' \doteq S_1'$ ist, so gilt auch stets $S'' \doteq S_1''$.

Weil S_1'' ein beiderseitiges Vielfaches von S_1 und S_1' und $S_1 \doteq S$, $S_1' \doteq S'$ ist, so muß S_1'' auch ein beiderseitiges Vielfaches von S und S' sein. Es sind also die Substitutionen S'' und S_1'' beide sowohl Links- wie Rechtsvielfache von S und S'. Daraus schließt man, wenn $|S| = m$, $|S'| = m'$ gesetzt wird, auf das Bestehen der Kongruenzen

$$\bar{S}'' S_1'' \equiv S_1'' \bar{S}'' \equiv 0, \ (m) \qquad \bar{S}'' S_1'' \equiv S_1'' \bar{S}'' \equiv 0, \ (m'),$$

aus denen, weil m prim zu m',

$$\bar{S}''\,S_1'' \equiv S_1''\,\bar{S}'' \equiv 0, \quad (mm')$$

folgt; und diese beiden Kongruenzen besagen, weil $|S''| = |S_1''| = mm'$, daß S'' und S_1'' doppelt äquivalent sind (vergleiche Nr. 7).

Die Kongruenzkomposition wird in den Scharen eindeutig. Wir dürfen daher von der aus zwei Scharen kongruent komponierten Schar oder, da hier kein Mißverständnis möglich ist, von der *aus zwei Scharen komponierten Schar* sprechen.

Durch Kongruenzkomposition der Substitutionen zweier Rechtsklassen entsteht wieder eine Rechtsklasse und durch Kongruenzkomposition der Substitutionen zweier Linksklassen wieder eine Linksklasse. Der Beweis dafür ist im vorigen Beweis enthalten. Man kann daher von der *aus zwei Rechtsklassen komponierten Rechtsklasse* und ebenso von der *aus zwei Linksklassen komponierten Linksklasse* sprechen.

12. Bisweilen entsteht die Aufgabe, zu einer gegebenen Substitution zwei andere zu bestimmen, aus denen sie kongruent komponiert ist. Hier gilt der folgende Satz.

Satz XII. Ist die Determinante m'' der Substitution S'' irgendwie in zwei zueinander prime Faktoren m, m' zerlegt, so daß $m'' = mm'$, so kann man stets Substitutionen S, S' mit den Determinanten m, m' bestimmen, aus denen S'' kongruent komponiert ist.

Ist nämlich zunächst S'' eine primitive Substitution und sind ν, ν' irgend zwei beziehungsweise zu m, m' prime Zahlen, so gibt es nach Satz III zwei Substitutionen S, S' mit den Determinanten m, m', so daß

$$S \equiv \nu S'', \ (m) \qquad S' \equiv \nu' S'', \ (m').$$

Daraus folgt nach Satz IX, daß S'' aus S und S' kongruent komponiert ist; denn bestimmt man μ, μ' durch die Kongruenzen $\mu\nu \equiv 1$, (m), $\mu'\nu' \equiv 1$, (m'), so wird

$$S'' \equiv \mu S, \ (m) \qquad S'' \equiv \mu' S', \ (m').$$

Hat aber die Substitution S'' den Teiler τ'', so daß $S'' = \tau'' S_1''$ und S_1'' primitiv ist, so geht τ''^2 in mm' auf. Man kann also τ, τ' so bestimmen, daß $\tau'' = \tau\tau'$ und $m = \tau^2 m_1$, $m' = \tau'^2 m_1'$, wobei m_1, m_1' ganze Zahlen sind. Bestimmt man dann zwei Substitutionen S_1, S_1' mit den Determinanten m_1, m_1', aus denen S_1'' kongruent komponiert ist, so ist $S'' = \tau'' S_1''$ aus $S = \tau S_1$ und $S' = \tau' S_1'$ kongruent komponiert.

Man zeigt auch leicht, daß die Scharen, denen die Substitutionen S, S' angehören, durch S'' und m, m' eindeutig bestimmt sind*).

Beispiel: Ist die Substitution $\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{matrix}\right\|$ von der Determinante 15 gegeben, so findet man für $m=3$, $m'=5$, wenn $\nu=1$, $\nu'=1$ gesetzt wird, die beiden Substitutionen $\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{matrix}\right\|$, (3) und $\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 7 & -1\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{matrix}\right\|$, (5), aus denen $\left\|\begin{matrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{matrix}\right\|$ kongruent komponiert ist.

13. Sind drei oder mehr Substitutionen gegeben, deren Determinanten zu je zweien prim sind, so kann man in irgend einer Reihenfolge immer zwei Substitutionen nach der Methode der Kongruenzkomposition zusammensetzen. Wie die Anordnung der einzelnen Schritte auch gewählt sei, alle am Schluß entstehenden Substitutionen werden doch sowohl Links- wie Rechtsvielfache von jeder der gegebenen sein; daraus schließt man, da sie gleiche Determinanten haben, ähnlich wie in Nr. 11, daß sie derselben Schar angehören. In diesem Sinne gilt für die Kongruenzkomposition das kommutative und das assoziative Gesetz.

2. Kapitel. Erzeugende Substitutionen.

14. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zu den binären quadratischen Formen, aus deren Theorie wir die einfacheren Begriffe wie Äquivalenz, Formenklasse, primitive und imprimitive Form, Teiler einer Form**) voraussetzen. Dabei bezeichnen wir durch (a, b, c) abweichend von *Gauß* die Form $ax^2+bxy+cy^2$; dadurch wird die Unterscheidung in eigentlich und uneigentlich primitive Formen hinfällig, was für die Kompositionstheorie von Vorteil ist. Der Kürze wegen setzen wir $(a, b, c)=\varphi$ und entsprechend $(a', b', c')=\varphi'$ usw..

---

*) Aus Nr. 11 und Nr. 12 folgert man, daß die vier Funktionen, die bei gegebener Determinante die Anzahl sämtlicher oder die primitiver Scharen oder die Anzahl sämtlicher oder die primitiver Rechts- oder Linksklassen angeben, bei zwei zueinander primen Determinanten m, m' alle der Funktionalgleichung $f(mm')=f(m)\,f(m')$ genügen.

**) vgl. z. B. *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie 4. Auflage § 53ff.

Die Zahl $b^2-4ac=D$, die Diskriminante der Form φ, kann ganz beliebige, nur der Bedingung $D\equiv 0$, (4) oder $D\equiv 1$, (4) genügende Werte haben. Es ist ein Vorteil unserer Betrachtungsweise, daß eine Ausschließung oder besondere Untersuchung der Formen mit quadratischer oder verschwindender Diskriminante nicht erforderlich ist.

Das System $\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}$ werde das Koeffizientensystem der Form $\varphi=(a, b, c)$ genannt und durch Φ bezeichnet. Obwohl wir mit den Systemen Φ bisweilen symbolisch wie mit Substitutionen rechnen werden, ist doch auf den Unterschied zu achten, daß die Determinante des Systemes Φ, die mit der negativ genommenen Diskriminante der Form φ übereinstimmt, nicht notwendig von Null verschieden ist.

Wir fassen nun die sämtlichen Formen von der gleichen Diskriminante D ins Auge, so daß also von jetzt an bei den betrachteten Formen immer stillschweigend die Gleichheit der Diskriminante vorausgesetzt wird, wählen unter den primitiven eine, $\chi=(g, h, k)$, mit dem Koeffizientensystem X willkürlich aber fest aus und bezeichnen diese wegen der fundamentalen Rolle, die sie im folgenden spielen wird, als *Grundform*. Die Klasse, der die Grundform angehört, nennen wir die *Grundklasse*.

15. Auf die Grundform χ denken wir uns eine lineare Substitution S, deren Determinante $|S|=m$ sei, ausgeübt. Dadurch möge sie in (A, B, C) übergehn. Diese neue Form hat dann die Diskriminante $B^2-4AC=Dm^2$. Wir unterwerfen nun diejenigen Substitutionen S von der Determinante $|S|=m$ einer gesonderten Betrachtung, für die die Zahlen A, B, C durch m teilbar werden, so daß $A=ma$, $B=mb$, $C=mc$ gesetzt werden kann. Die Form $\varphi=(a, b, c)$ hat jetzt offenbar wiederum die Diskriminante D.

Daß es solche Substitutionen gibt, sogar, wenn φ unter den Formen mit der Diskriminante D beliebig gewählt wird, lehrt der folgende Satz.

Satz XIII. Sind χ und φ zwei beliebige Formen gleicher Diskriminante, so gibt es stets Substitutionen S, die χ in die mit der Determinante von S multiplizierte Form φ transformieren).*

---

*) Solche Substitutionen sind in unendlicher Zahl vorhanden, sogar, wenn sie als primitiv vorausgesetzt werden.

Ist $\chi = (g, h, k)$ und $\varphi = (a, b, c)$, so hat im Falle, daß g und a beide von Null verschieden sind (was immer eintritt, wenn D kein Quadrat ist), die Substitution

$$\begin{Vmatrix} a & \frac{1}{2}(b-h) \\ 0 & g \end{Vmatrix}$$

mit der Determinante ag die verlangte Eigenschaft, wie die Ausrechnung ergibt. Es mögen nun g und a beide von Null verschieden sein oder nicht, auf jeden Fall gibt es unimodulare Substitutionen U, die χ in eine Form $\chi' = (g', h', k')$ transformieren, für die $g' \neq 0$, und ebenso unimodulare Substitutionen U', die φ in eine Form $\varphi' = (a', b', c')$ transformieren, für die $a' \neq 0$. (Im Falle, daß D kein Quadrat ist, können U, U' sogar beliebig gewählt werden.) Dann genügen alle Substitutionen

$$U \begin{Vmatrix} a' & \frac{1}{2}(b'-h') \\ 0 & g' \end{Vmatrix} \overline{U}',$$

deren Determinante $a'g'$ ist, den Bedingungen unseres Satzes.

Beispiel: Ist $D = -80$, $\chi = (3, 2, 7)$, $\varphi = (4, 4, 6)$, also $a = 4$, $\frac{1}{2}(b-h) = 1$, $g = 3$, so ergibt sich die Substitution $\begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$, die die Determinante 12 hat und χ in das 12fache von φ transformiert. Transformiert man aber χ durch $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ in $\chi' = (3, -10, 15)$ und φ durch $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ in $\varphi' = (6, -4, 4)$, so wird $a' = 6$, $\frac{1}{2}(b'-h') = 3$, $g' = 3$, und es ergibt sich die Substitution

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

von der Determinante 18, die χ in das 18fache von φ transformiert.

16. Der vorige Satz berechtigt uns, folgende Definition aufzustellen.

Definition. Eine Substitution S, deren Determinante mit m bezeichnet werde, soll eine zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitution heißen, wenn sie die Grundform χ in das $m$fache der Form φ transformiert. Entsprechend heißt φ eine aus der Grundform χ durch die Substitution S erzeugte Form.

Eine solche Substitution S genügt also der Bedingung $\dot{S}XS = m\Phi$, wo $m = |S|$ oder in ausführlicher Schreibweise, wenn $S = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ gesetzt wird, den Bedingungen

$$g\alpha^2 + h\alpha\gamma + k\gamma^2 = ma$$
$$2g\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2k\gamma\delta = mb$$
$$g\beta^2 + h\beta\delta + k\delta^2 = mc$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = m.$$

Im allgemeinen genügt es, die Betrachtungen auf primitive Substitutionen zu beschränken; denn wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den größten gemeinsamen Teiler μ haben, so ist die von diesem Teiler befreite Substitution ebenfalls eine zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitution.

Da wir uns vorläufig immer auf ein und dieselbe Grundform beziehen werden, wird es der Kürze wegen gestattet sein, die Grundform unerwähnt zu lassen und schlechthin, je nachdem wir die Substitution S oder die Form φ im Auge haben, von einer *erzeugenden Substitution* oder einer *erzeugten Form* zu sprechen. Dabei brauchen wir für erzeugende Substitution auch kurz das Wort *Erzeugende*, um eine Häufung des Wortes Substitution zu vermeiden.

Ist S eine Erzeugende, φ die erzeugte Form und U eine beliebige unimodulare Substitution, so ist die Substitution $S' = SU$ ebenfalls eine zu derselben Grundform gehörige Erzeugende und erzeugt gerade die Form φ', die aus φ durch die unimodulare Substitution U entsteht. Die Rechtsklasse, der eine Erzeugende angehört, enthält also lauter erzeugende Substitutionen und soll kurz eine *Klasse erzeugender Substitutionen* heißen*).

Offenbar ist jede unimodulare Substitution Erzeugende bei beliebiger Grundform.

Beispiel: Im vorigen Beispiel sind $\left\| \begin{matrix} -3 & -6 \\ 3 & 0 \end{matrix} \right\|$, also auch $\left\| \begin{matrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$, und $\left\| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|$ zur Grundform (3, 2, 7) gehörige, die Form (4, 4, 6) erzeugende Substitutionen.

---

*) Über die Anzahl der voneinander verschiedenen Klassen primitiver erzeugender Substitutionen von der gleichen Determinante m gibt der folgende, für beliebige mögliche Werte der Diskriminante D gültige Satz Auskunft: Die Klassen primitiver erzeugender Substitutionen von der gleichen Determinante m lassen sich umkehrbar eindeutig den Wurzeln der Kongruenz $\frac{x^2 - D}{4} \equiv 0, (m)$ zuordnen.

17. *Satz XIV. Hat die Form φ den Teiler σ, so sind die Determinanten aller die Form φ erzeugenden Substitutionen durch σ teilbar.*

Ist nämlich $S = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$ mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = m$ eine beliebige, zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitution, d. h. transformiert S die Form $\chi = (g, h, k)$ in das $m$fache der Form $\varphi = (a, b, c)$, so transformiert umgekehrt $\bar{S}$ die Form (a, b, c) in das $m$fache der Form (g, h, k). Es bestehn also die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\delta^2 - b\delta\gamma + c\gamma^2 &= mg \\ -2a\delta\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - 2c\gamma\alpha &= mh \\ a\beta^2 - b\beta\alpha + c\alpha^2 &= mk, \end{aligned}$$

aus denen man, da ihre linken Seiten durch σ teilbar sind, entnimmt, daß auch mg, mh, mk und folglich m, da g, h, k ohne gemeinsamen Teiler sind, durch σ teilbar sein müssen.

Beispiel: Im vorigen Beispiel hat die Form (4, 4, 6) den Teiler 2, und die Determinanten der diese Form erzeugenden Substitutionen $\left\| \begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|$ und $\left\| \begin{matrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$, nämlich 12 und 2, sind durch 2 teilbar.

18. Außer der Zahl σ besitzen die Determinanten der die Form φ erzeugenden Substitutionen keine weiteren gemeinsamen Faktoren. Vielmehr gilt der

Satz XV. Es gibt stets solche die Form φ mit dem Teiler σ erzeugende Substitutionen, deren Determinanten nach Division durch σ zu einer beliebig vorgegebenen Zahl prim werden.

Das ergibt sich aus dem Beweis des Satzes XIII unter Beachtung der bekannten Tatsache, daß in jeder Formenklasse Formen gefunden werden können, bei denen der erste Koeffizient nach Division durch den Teiler der Form zu einer beliebig vorgegebenen Zahl prim wird.

19. Wir wenden uns jetzt zu der Beantwortung der Frage: Welche Bedingung muß zwischen zwei Erzeugenden bestehn, damit die durch sie erzeugten Formen äquivalent sind? Sind aber S, S_1 zwei die äquivalenten Formen φ, φ_1 erzeugende Substitutionen, so gibt es eine unimodulare Substitution U, die φ in φ_1 transformiert. Dann werden SU und S_1 beide dieselbe Form φ_1 erzeugen, die Substitution $SU\bar{S}_1$ ist also eine die Grund-

form selbst wieder erzeugende Substitution. Kann umgekehrt für zwei Erzeugende S, S_1 eine unimodulare Substitution U bestimmt werden, so daß $SU\bar{S}_1$ die Grundform selbst wieder erzeugt, so müssen notwendig die Substitutionen SU und S_1 die gleichen, S und S_1 demnach äquivalente Formen erzeugen.

Wir werden also darauf geführt, diejenigen erzeugenden Substitutionen näher zu untersuchen, die die Grundform selbst wieder erzeugen.

20. Deshalb führen wir folgenden Begriff ein.

Definition. Eine Substitution, die, auf die Form φ ausgeübt, lediglich die Wirkung hat, sie mit einem konstanten Faktor zu multiplizieren, der gleich der Determinante der Substitution ist, heißt eine hemiautomorphe Substitution oder kurz eine Hemiautomorphe von φ.

Eine Hemiautomorphe von φ mit der Determinante 1 transformiert die Form φ in sich selbst, ist also in üblicher Bezeichnung eine *automorphe* Substitution von φ.

Eine Hemiautomorphe der Grundform χ ist eine die Grundform selbst wieder erzeugende Substitution.

In ähnlicher Weise wie die automorphen Substitutionen einer primitiven Form φ mit der Diskriminante D von den Lösungen der Gleichung

$$\frac{t^2 - D^2}{4} = 1$$

abhängen*), sind die hemiautomorphen Substitutionen von φ, deren Determinante n ist, mit den Lösungen der Gleichung

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = n$$

verknüpft. Das zeigt der folgende Satz.

21. *Satz XVI. Jede Hemiautomorphe der primitiven Form $\varphi = (a,b,c)$ ist in der Gestalt*

$$\Omega_\varphi = \begin{Vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{Vmatrix}$$

darstellbar; dabei sind t, u zwei ganze Zahlen, die der Gleichung

*) Vgl. etwa *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie, 4. Aufl., S. 151.

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = n$$

genügen, in der n die Determinante der hemiautomorphen Substitution bedeutet; sind umgekehrt t, u, n ganze, der letzten Gleichung genügende Zahlen, so ist die Substitution Ω_φ ganzzahlig und eine Hemiautomorphe von φ mit der Determinante n.

Beispiel: Die Substitution $\left\| \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\|$ mit der Determinante 10 ist eine Hemiautomorphe der Form (1, 1, 4) mit der Diskriminante $D = -15$, und ein Vergleich mit Ω_φ ergibt für die Gleichung $\frac{t^2 + 15u^2}{4} = 10$ die Lösung $t = 5$, $u = 1$. Umgekehrt erhält man für die Lösung $t = 3$, $u = -1$ der Gleichung $\frac{t^2 + 15u^2}{4} = 6$ die Substitution $\left\| \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|$ mit der Determinante 6, die eine Hemiautomorphe der Form (1, 1, 4) ist, da sie diese Form in das 6fache von sich selbst transformiert.

22. Zum Beweise des vorigen Satzes sei die Substitution

$$T = \left\| \begin{matrix} \lambda & \mu \\ \nu & \varrho \end{matrix} \right\|$$

mit der Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = n$ eine Hemiautomorphe der primitiven Form $\varphi = (a, b, c)$. Dann besteht die symbolische Gleichung

$$\dot{T}\Phi T = n\Phi,$$

aus der man die andre

$$\dot{T}\Phi = \Phi\bar{T}$$

folgert, die, ausführlich geschrieben, folgende Gestalt annimmt

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu & \varrho \end{matrix} \right\| \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} \left\| \begin{matrix} \varrho & -\mu \\ -\nu & \lambda \end{matrix} \right\|.$$

Diese symbolische Gleichung ist, wie die Ausrechnung ergibt, gleichbedeutend mit den drei linearen Gleichungen

$$a(\lambda - \varrho) + b\nu = 0, \quad a\mu + c\nu = 0, \quad b\mu + c(\varrho - \lambda) = 0.$$

Aus diesen entnimmt man, da a, b, c ohne gemeinsamen Teiler vorausgesetzt werden, daß

$$\varrho - \lambda = bu, \quad \mu = -cu, \quad \nu = au$$

gesetzt werden kann, wo u eine ganze Zahl ist. Schreibt man noch

$$\varrho + \lambda = t,$$

so ergibt sich

$$\lambda = \frac{t - bu}{2}, \quad \mu = -cu, \quad \nu = au, \quad \varrho = \frac{t + bu}{2},$$

d. h. T ist von der Gestalt Ω_φ; bildet man weiter mit den erhaltenen Werten für die Koeffizienten von T die Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = n$, so ergibt sich für t, u die Gleichung

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = n.$$

Genügen umgekehrt die ganzen Zahlen t, u, n der letzten Gleichung, so ist zunächst die Substitution Ω_φ ganzzahlig. Dies braucht nur für die beiden Koeffizienten $\frac{t - bu}{2}$ und $\frac{t + bu}{2}$ bewiesen zu werden. Nun ist aber ihre Summe gleich t, also ganz, und ihr Produkt gleich $n - acu^2$, also ebenfalls ganz. Folglich sind die beiden Zahlen, da sie rational sind, selbst ganz. Daß aber Ω_φ eine Hemiautomorphe von φ ist, also, da sie die Determinante n hat, φ in $n\varphi$ transformiert, ergibt sich sowohl unmittelbar durch Ausrechnen als auch durch Wiederholung der vorigen Beweisschlüsse in umgekehrter Reihenfolge.

23. Damit ist der Beweis des Satzes XVI vollständig geführt. Er zeigt, daß die Gesamtheit der Hemiautomorphen der primitiven Form φ mit der Gesamtheit der Substitutionen Ω_φ identisch ist, wenn t, u alle Zahlen durchlaufen, für die $\frac{t^2 - Du^2}{4}$ eine ganze Zahl ist. Wir dürfen demnach das Zeichen Ω_φ für eine beliebige Hemiautomorphe der primitiven Form φ und entsprechend Ω_χ für eine beliebige Hemiautomorphe von χ anwenden.

Der Beweis des zweiten Teils des Satzes XVI ist übrigens, wie man leicht erkennt, gänzlich unabhängig von der Voraussetzung der Primitivität von φ. Dies besagt, daß auch für imprimitive Formen φ jede Substitution Ω_φ eine Hemiautomorphe ist. (Nur würde die Umkehrung nicht gelten.)*).

Wenn es auf den Zusammenhang ankommt, in dem die Substitution Ω_φ zu den Zahlen t, u steht, so nennen wir Ω_φ die mit den Zahlen t, u gebildete Hemiautomorphe von φ. Entsprechend mögen Ω'_φ, Ω''_φ

---

*) Hat die Form φ den Teiler σ, so tritt an Stelle der Gleichung $t^2 - Du^2 = 4n$ die andre $t^2 - Du^2 = 4\sigma^2 n$.

mit Zahlen t', u'; t'', u'' gebildete Hemiautomorphe von φ bedeuten.

24. Wir sind jetzt imstande, für die hemiautomorphen Substitutionen zwei fundamentale Sätze zu beweisen.

Satz XVII. Zwei hemiautomorphe Substitutionen derselben Form sind stets miteinander vertauschbar.

Zum Beweise darf die Form primitiv angenommen werden. Sind aber Ω_φ, Ω'_φ zwei beliebige Hemiautomorphe der primitiven Form φ, so ergibt die Zusammensetzung ebenfalls eine Hemiautomorphe $\Omega_\varphi\ \Omega'_\varphi = \Omega''_\varphi$, d. h. ausführlich geschrieben

$$\left\| \begin{matrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{t'-bu'}{2} & -cu' \\ au' & \frac{t'+bu'}{2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{t''-bu''}{2} & -cu'' \\ au'' & \frac{t''+bu''}{2} \end{matrix} \right\|.$$

Führt man hier die Zusammensetzung tatsächlich aus, so findet man, daß

$$t'' = \frac{tt' + Duu'}{2}, \qquad u'' = \frac{tu' + t'u}{2}$$

ist, und erkennt aus der Symmetrie dieser Formeln sofort die Richtigkeit der Behauptung. Es ist also

$$\Omega_\varphi \Omega'_\varphi = \Omega'_\varphi \Omega_\varphi = \Omega''_\varphi,$$

wobei die Zahlen t, u; t', u'; t'', u'', mit denen die Hemiautomorphen Ω_φ, Ω'_φ, Ω''_φ gebildet sind, durch die obigen Formeln miteinander verknüpft sind.

(Nebenbei ist damit zugleich bewiesen, daß die Zahlen t'', u'' gánz sind und der Gleichung $\frac{t''^2 - Du''^2}{4} = nn'$ genügen, wenn t, u; t', u' ganze Zahlen sind, die den Gleichungen $\frac{t^2 - Du^2}{4} = n$ und $\frac{t'^2 - Du'^2}{4} = n'$ genügen.)

Beispiel: Die Zusammensetzung der beiden Hemiautomorphen der Form (1, 1, 4) im Beispiel unter Nr. 21 ergibt

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 8 & 4 \\ -1 & 7 \end{matrix} \right\|.$$

Hier ist $t = 5$, $u = 1$, $t' = 3$, $u' = -1$, also $t'' = \frac{15+15}{2} = 15$, $u'' = \frac{-5+3}{2} = -1$.

25. *Satz XVIII. Sind Ω_χ und Ω_φ zwei mit denselben Zahlen t, u gebildete hemiautomorphe Substitutionen der Grundform χ und der beliebigen*

Form φ und ist S irgend eine zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitution, so ist stets identisch

$$\Omega_\chi S = S\Omega_\varphi.$$

Setzt man $|S| = m$, so kann man statt der letzten Gleichung auch

$$\bar{S}\Omega_\chi S = m\Omega_\varphi$$

schreiben, d. h. ausführlich

$$\left\|\begin{matrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\frac{t-hu}{2} & -ku\\ gu & \frac{t+hu}{2}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{matrix}\right\| = m\left\|\begin{matrix}\frac{t-bu}{2} & -cu\\ au & \frac{t+bu}{2}\end{matrix}\right\|.$$

Von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt man sich aber, wenn man die Zusammensetzung der drei Substitutionen links tatsächlich ausführt und beachtet, daß die Gleichungen

$$g\alpha^2 + h\alpha\gamma + k\gamma^2 = ma$$
$$2g\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2k\gamma\delta = mb$$
$$g\beta^2 + h\beta\delta + k\delta^2 = mc$$

bestehen, weil S eine zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitution ist (vgl. Nr. 16).

Beispiel: Ist für $D = -80$ $\chi = (3, 2, 7)$, $\varphi = (4, 4, 6)$ und $S = \left\|\begin{matrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\right\|$, so hat man für die Lösung $t = 2$, $u = 1$ der Gleichung $\frac{t^2 + 80u^2}{4} = 21$ die Hemiautomorphen $\Omega_\chi = \left\|\begin{matrix}0 & -7\\ 3 & 2\end{matrix}\right\|$, $\Omega_\varphi = \left\|\begin{matrix}-1 & -6\\ 4 & 3\end{matrix}\right\|$, und es ergibt sich

$$\left\|\begin{matrix}0 & -7\\ 3 & 2\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}-1 & -6\\ 4 & 3\end{matrix}\right\|.$$

26. Wir wenden uns jetzt wieder zu der im 19. Abschnitt aufgeworfenen Frage und stellen folgenden Satz auf.

Satz XIX. Damit zwei Erzeugende S, S_1 mit den Determinanten m, m_1 äquivalente Formen erzeugen, ist notwendig und hinreichend, daß eine Hemiautomorphe der Grundform Ω_χ mit der Determinante $m m_1$ existiert, die der Kongruenz

$$\bar{S}\Omega_\chi S_1 \equiv 0, \quad (m m_1)$$

genügt.

Es ist oben bereits gezeigt, daß S, S_1 dann und nur dann äquivalente Formen erzeugen, wenn es eine unimodulare Substitution U gibt, so daß $SU\bar{S}_1$ eine die Grundform selbst wieder erzeugende Substitution, d. h. eine Hemiautomorphe der Grundform ist, so daß

$$SU\bar{S}_1 = \Omega_\chi$$

gesetzt werden kann. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\bar{S}\Omega_\chi S_1 = m m_1 U,$$

d. h. das Bestehn der obigen Kongruenz. Ist umgekehrt die Kongruenz erfüllt, so kann man

$$\bar{S}\Omega_\chi S_1 = m m_1 U$$

setzen, wo U eine ganzzahlige und zwar, weil $\bar{S}\Omega_\chi S_1$ die Determinante $m^2 m_1^2$ hat, eine unimodulare Substitution ist; daraus folgt aber

$$SU\bar{S}_1 = \Omega_\chi .$$

Damit ist der Satz bewiesen. Er zeigt im Zusammenhang mit dem Vorhergehenden, daß die Frage, ob S, S_1 äquivalente Formen erzeugen, zurückgeführt werden kann auf die Auflösungen der Gleichung

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = m m_1 .$$

Diese Gleichung hat, wenn D negativ, Null oder ein Quadrat ist, endlich viele, dagegen wenn D eine positive, nicht quadratische Zahl ist, unendlich viele Auflösungen. Doch braucht man im einen wie im andern Fall nur endlich viele Auflösungen in Betracht zu ziehen, worauf wir nicht weiter eingehn*).

Beispiel: Ist die Grundform $(1, 1, 6)$ mit der Diskriminante $D = -23$ gegeben, so erzeugen $\left\| \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$ und $\left\| \begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|$ mit den Determinanten 3 und 4 äquivalente Formen; denn man findet aus der Lösung $t = 5$, $u = -1$ der Gleichung $\frac{t^2 + 23u^2}{4} = 12$ die Hemiautomorphe $\left\| \begin{matrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|$, für die die Kongruenz $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \equiv 0$, (12) besteht.

---

*) Man kann die Betrachtungen nämlich auf inäquivalente Lösungen beschränken, wenn 2 Lösungen t, u und t', u' äquivalent genannt werden, sobald $tt' \equiv Duu'$, $(2mm_1)$ und $tu' \equiv t'u$, $(2mm_1)$.

Andrerseits können $\left\|\begin{matrix}2&0\\0&1\end{matrix}\right\|$ und $\left\|\begin{matrix}6&1\\-2&1\end{matrix}\right\|$ keine äquivalenten Formen erzeugen; denn die Gleichung $\frac{t^2+23u^2}{4}=16$ besitzt nur die Lösung $t=\pm 8$, $u=0$, diese liefert $\Omega_\chi=\left\|\begin{matrix}\pm 4&0\\0&\pm 4\end{matrix}\right\|$, und $\left\|\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\pm 4&0\\0&\pm 4\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}6&1\\-2&1\end{matrix}\right\|$ ist nicht kongruent Null nach dem Modul 16.

3. Kapitel. Die Komposition relativ einer Grundform.

27. Wir gehen jetzt dazu über, den Begriff der Kongruenzkomposition auf die erzeugenden Substitutionen anzuwenden, und stellen den Satz an die Spitze:

Satz XX. Jede aus zwei Erzeugenden S, S' kongruent komponierte Substitution S'' ist wieder eine Erzeugende, und ist umgekehrt die Erzeugende S'' aus zwei Substitutionen S, S' kongruent komponiert, so sind diese ebenfalls Erzeugende.

Zum Beweise stellen wir S'' nach Satz X durch die Doppelgleichung

$$S''=SUS'=S'U'S$$

dar und setzen $|S|=m$, $|S'|=m'$, so daß m zu m' prim und $|S''|=mm'$

Ist dann bekannt, daß S, S' zur Grundform χ gehörige Erzeugende sind, so heißt das: χ wird von S in eine durch m und von S' in eine durch m' teilbare Form transformiert. Dann folgt aber aus der Doppelgleichung, daß S'' χ in eine sowohl durch m wie m', also auch, da m prim zu m', durch mm' teilbare Form überführt; d. h. S'' ist eine zur Grundform χ gehörige erzeugende Substitution.

Ist umgekehrt bekannt, daß S'' eine zur Grundform χ gehörige Erzeugende ist, so führt S'' χ in eine durch mm' teilbare Form über. χ muß also auch durch die Substitutionen $S''\bar{S}'\bar{U}=m'S$ und $S''\bar{S}\bar{U}'=mS'$ in durch mm' teilbare Formen transformiert werden. Das ist aber, da m prim zu m', nur möglich, wenn χ von S in eine durch m und von S' in eine durch m' teilbare Form übergeführt wird, d. h. wenn S, S' zur Grundform χ gehörige erzeugende Substitutionen sind.

Wir dürfen daher von einer Erzeugenden sprechen, die aus zwei

gegebenen Erzeugenden, und umgekehrt von zwei Erzeugenden, aus denen eine gegebene Erzeugende kongruent komponiert ist.

Beispiel: Wählt man die Form (5, 4, 9) von der Diskriminante $D = -164$ zur Grundform, so sind $\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\|$ und $\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix} \right\|$ zu dieser Grundform gehörige Erzeugende mit den zueinander primen Determinanten 2 und 5. Es ist aber $\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix} \right\|$ aus beiden kongruent komponiert, und diese Substitution ist ebenfalls eine zur Grundform (5, 4, 9) gehörige Erzeugende. Die Hemiautomorphe $\left\| \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\|$ der Form (1, 1, 4) (Nr. 21) ist aus den Substitutionen $\left\| \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\|$ und $\left\| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\|$ kongruent komponiert, und diese sind Erzeugende zur Grundform (1, 1, 4).

28. Der Satz XX berechtigt uns, folgende Definition aufzustellen.

Definition. Wenn S und S' zwei zur Grundform χ gehörige Erzeugende mit zueinander primen Determinanten sind, von denen die erste die Form φ, die zweite die Form φ' erzeugt, so soll jede Form φ'', die durch eine aus S und S' kongruent komponierte Substitution S'' erzeugt wird, relativ der Grundform χ aus φ und φ' zusammengesetzt oder komponiert genannt werden.

Wo kein Mißverständnis möglich ist, werden wir φ'' auch ohne Angabe der Grundform kurz die *komponierte Form* und dann im Gegensatz dazu φ und φ' *die zu komponierenden Formen* nennen.

Beispiel: Durch die drei ersten im vorigen Beispiel angegebenen Substitutionen werden der Reihe nach die Formen (5, −4, 9), (2, −6, 25), (1, 0, 41) erzeugt. Demnach ist relativ der Grundform (5, 4, 9) aus den Formen (5, − 4, 9) und (2, −6, 25) die Form (1, 0, 41) zusammengesetzt.

29. Der *Gauß*sche Kompositionsbegriff ist in unserm enthalten. Wählt man nämlich als Grundform die Hauptform $\eta = (1, \varepsilon, -d)$, wo $\varepsilon = 0$ oder 1 und $\varepsilon^2 + 4d = D$ ist, und ist $\varphi = (a, b, c)$ eine beliebige Form derselben Diskriminante, die nur der einen Bedingung genügt, daß a nicht verschwindet, so wird diese stets durch die Substitution

$$S = \left\| \begin{matrix} a & \frac{b-\varepsilon}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

mit der Determinante a erzeugt, wie die Ausrechnung ergibt. Ist dann $\varphi' = (a', b', c')$ eine zweite Form derselben Diskriminante, für die a' zu a prim ist, so wird diese ebenso durch die Substitution

$$S' = \left\| \begin{matrix} a' & \frac{b'-\varepsilon}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

mit der Determinante a' erzeugt. Bestimmt man jetzt eine Zahl b'' durch die Kongruenzen

$$b'' \equiv b, \ (2a), \quad b'' \equiv b', \ (2a'),$$

was immer möglich ist, weil a, a' zueinander prim und b, b' gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, und setzt dann $a'' = aa'$, so ist die Substitution

$$S'' = \left\| \begin{matrix} a'' & \frac{b''-\varepsilon}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

aus S und S' kongruent komponiert (da $|S''| = aa'$, $S'' \equiv S$, (a) und $S'' \equiv S'$, (a') ist) und erzeugt eine Form $\varphi'' = (a'', b'', c'')$, die relativ der Grundform η aus φ und φ' komponiert ist.

Nun ist aber auch im *Gauß*schen Sinne φ'' aus φ und φ' komponiert*).

Beispiel: Ist $D = -164$, so ist $\eta = (1, 0, 41)$. Wenn man dann die Formen $\varphi = (5, -4, 9)$, $\varphi' = (2, -6, 25)$ auswählt (vgl. voriges Beispiel), so ist $S = \left\| \begin{matrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, $S' = \left\| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$. Man kann dann $b'' = 6$, also $S'' = \left\| \begin{matrix} 10 & 3 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|$ setzen. Diese Substitution erzeugt aber die Form $(10, 6, 5)$; demnach ist relativ der Hauptform $(1, 0, 41)$ aus den Formen $(5, -4, 9)$ und $(2, -6, 25)$ die Form $(10, 6, 5)$ zusammengesetzt.

30. Wir wenden uns jetzt wieder allgemeinen Betrachtungen zu, setzen also eine beliebig gewählte Grundform voraus.

---

*) *Gauß*, Disq. arith. art. 243, 1.

Offenbar müssen die Teiler der zu komponierenden Formen zueinander prim sein, weil sonst nach Satz XIV keine zwei sie erzeugende Substitutionen mit zueinander primen Determinanten gefunden werden können.

Sind andrerseits zwei beliebige Formen φ, φ' mit zueinander primen Teilern σ, σ' gegeben, so folgt aus Satz XV, daß man zu irgend einer Grundform χ gehörige, die Formen φ, φ' erzeugende Substitutionen mit zueinander primen Determinanten finden kann. Denn man kann nach diesem Satze eine die Form φ erzeugende Substitution S mit der Determinante m so wählen, daß $\frac{m}{\sigma}$ und folglich auch m zu σ' prim wird, und weiter eine die Form φ' erzeugende Substitution S' mit der Determinante m', so daß $\frac{m'}{\sigma'}$ zu m prim ist. Damit ist aber erreicht, daß m zu m' prim ist. Somit lassen sich Formen φ'' bestimmen, die relativ χ aus φ und φ' komponiert sind.

31. *Satz XXI. Jede relativ irgend einer Grundform χ aus einer Form φ mit dem Teiler σ und einer Form φ' mit dem Teiler σ' komponierte Form φ'' besitzt den Teiler $\sigma\sigma'$.*

Sind nämlich S, S' zwei die Formen φ, φ' erzeugende Substitutionen mit den zueinander primen Determinanten m, m', und ist S'' eine aus S und S' kongruent komponierte, die Form φ'' erzeugende Substitution, so gibt es nach Satz X zwei unimodulare Substitutionen U, U', so daß

$$S'' = SUS' = S'U'S.$$

Diese doppelte Darstellung der kongruent komponierten Substitution S'' besagt aber, wenn man sich die Wirkung der auf die Grundform χ ausgeübten Substitutionen S, S', S'' vergegenwärtigt, daß die Substitution US' φ in $m'\varphi''$ und die Substitution $U'S$ φ' in $m\varphi''$ transformiert. Ist dann σ'' der Teiler der Form φ'', so folgt hieraus, daß σ in $m'\sigma''$ und σ' in $m\sigma''$ aufgeht. Da σ als Teiler von m zu m' und σ' als Teiler von m' zu m prim ist, weil m, m' zueinander prim sind, so muß notwendig σ sowohl wie σ' in σ'' aufgehn. Es ist also σ'', weil σ zu σ' prim ist, durch das Produkt $\sigma\sigma'$ teilbar.

Umgekehrt ist aber auch $\sigma\sigma'$ durch σ'' teilbar. Denn aus dem

eben Bewiesenen folgt, daß die Substitution $\overline{S}'\,\overline{U}\;\varphi''$ in $m'\varphi$ und die Substitution $\overline{S}\,\overline{U}'\;\varphi''$ in $m\varphi'$ transformiert. Daraus schließt man, daß σ'' in $m'\sigma$ und $m\sigma'$, also auch in dem größten gemeinsamen Teiler beider Zahlen, d. i. in $\sigma\sigma'$ aufgeht. Daß aber $\sigma\sigma'$ der größte gemeinsame Teiler von $m'\sigma$ und $m\sigma'$ ist, folgt daraus, daß $\frac{m}{\sigma}$ und $\frac{m'}{\sigma'}$ zueinander prim sind, weil m und m' zueinander prim sind.

Es ist also $\sigma'' = \sigma\sigma'$.

Beispiel: Relativ der Grundform (1, 0, 72) ist aus den Formen (4, 0, 18) und (9, 6, 9) die Form (36, 24, 6) zusammengesetzt, weil aus den Substitutionen $\left\|\begin{matrix}4&0\\0&1\end{matrix}\right\|$ und $\left\|\begin{matrix}9&3\\0&1\end{matrix}\right\|$ die Substitution $\left\|\begin{matrix}36&12\\0&1\end{matrix}\right\|$ kongruent komponiert ist. Die zu komponierenden Formen haben aber die Teiler 2 und 3, und die komponierte Form hat den Teiler $6 = 2\cdot 3$.

32. Für die *Gauß*sche Kompositionstheorie gilt bekanntlich die fundamentale Tatsache, daß alle aus zwei Formen komponierten Formen einer bestimmten Formenklasse angehören. Ein ähnlicher Satz besteht in unserer Theorie.

Satz XXII. Alle relativ einer festen Grundform χ aus zwei Formen φ und φ' zusammengesetzten Formen φ'' sind einander äquivalent.

Zur Erläuterung dieses Satzes bemerken wir, daß zwar die Äquivalenz aller der Formen, die aus der Vieldeutigkeit des Begriffs der kongruent komponierten Substitution entstehn, wegen Satz XI auf der Hand liegt. Nun gibt es aber unendlich viele Paare von Substitutionen, welche zueinander prime Determinanten haben und die zu komponierenden Formen φ und φ' erzeugen, wie aus Satz XIII und XV folgt, und es ist keineswegs sofort ersichtlich, daß zwei aus verschiedenen Paaren kongruent komponierte Substitutionen äquivalente Formen erzeugen.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem folgenden, in dem er als Spezialfall enthalten ist. (Übrigens ist die größere Allgemeinheit nur scheinbar, man könnte auch unter Benutzung von Satz V jenen Satz aus diesem ableiten.)

33. *Satz XXIII. Fundamentalsatz. Wenn relativ zur Grundform χ aus den Formen φ und φ' die Form φ'', aus den Formen φ_1 und φ_1' die*

Form φ_1'' komponiert ist und φ äquivalent φ_1, φ' äquivalent φ_1' ist, so ist auch stets φ'' äquivalent φ_1''.

Ehe wir zum Beweise dieses Satzes schreiten, bringen wir zuerst Voraussetzung und Behauptung mit Hilfe der früheren Sätze in eine geeignete Form.

Nach Voraussetzung gibt es zwei Substitutionen S und S' mit zueinander primen Determinanten m und m', von denen die erste die Form φ, die zweite die Form φ' erzeugt, und eine aus beiden kongruent komponierte Substitution S'' mit der Determinante $m'' = mm'$, die die Form φ'' erzeugt. Nach Voraussetzung gibt es weiter zwei Substitutionen S_1 und S_1' mit zueinander primen Determinanten m_1 und m_1', von denen die erste die Form φ_1, die zweite die Form φ_1' erzeugt, und eine aus beiden kongruent komponierte Substitution S_1'' von der Determinante $m_1'' = m_1 m_1'$, die die Form φ_1'' erzeugt.

Da ferner die durch die Substitutionen S und S_1 erzeugten Formen φ und φ_1 äquivalent sind, gibt es nach Satz XIX für die Grundform χ eine Hemiautomorphe Ω_χ mit der Determinante mm_1, so daß die Kongruenz

$$\bar{S}\,\Omega_\chi S_1 \equiv 0, \ (mm_1)$$

besteht. Ebenso gibt es, weil die durch die Substitutionen S_1 und S_1' erzeugten Formen φ' und φ_1' äquivalent sind, für die Grundform χ eine Hemiautomorphe Ω_χ' mit der Determinante $m'm_1'$, so daß die Kongruenz

$$\bar{S}'\,\Omega_\chi' S_1' \equiv 0, \ (m'm_1')$$

besteht.

Die Behauptung endlich, daß die durch die Substitutionen S'' und S_1'' erzeugten Formen φ'' und φ_1'' äquivalent sind, ist nach demselben Satz XIX bewiesen, sobald gezeigt werden kann, daß für die Grundform χ eine Hemiautomorphe Ω_χ'' mit der Determinante $m''m_1''$ existiert, so daß die Kongruenz

$$\bar{S}''\,\Omega_\chi'' S_1'' \equiv 0, \ (m''m_1'')$$

erfüllt ist.

Wir nennen die beiden ersten Kongruenzen die Kongruenzen der Voraussetzung und die letzte die Kongruenz der Behauptung.

34. Es liegt nun von vornherein nahe, für Ω_χ'' die aus Ω_χ und Ω_χ' zusammengesetzte Substitution einzusetzen, so daß nach Satz XVII

$$\Omega''_\chi = \Omega_\chi \Omega'_\chi = \Omega'_\chi \Omega_\chi.$$

In der Tat ist dann auch die Kongruenz der Behauptung erfüllt. Das zeigen wir durch den Nachweis, daß ihre linke Seite durch die vier Zahlen $m m'_1$, $m' m_1$, $m m_1$, $m' m'_1$ teilbar ist. Damit ist zugleich bewiesen, daß sie durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser vier Zahlen teilbar ist. Dieses ist aber $m m' m_1 m'_1 = m'' m''_1$; denn das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der zweiten und dritten Zahl ist $m m' m_1$, der ersten und letzten $m m' m'_1$ und das dieser beiden $m m' m_1 m'_1$, weil m zu m' und m_1 zu m'_1 prim ist.

Mit andern Worten heißt das: Unsere Behauptung ist bewiesen, sobald gezeigt werden kann, daß unter der obigen Annahme für Ω''_χ die linke Seite der Kongruenz der Behauptung durch die vier Zahlen $m m'_1$, $m' m_1$, $m m_1$, $m' m'_1$ teilbar ist. Dies ergibt sich aber folgendermaßen.

35. Setzt man die linke Seite der ersten Kongruenz der Voraussetzung einmal rechts mit $\bar{S}_1$ und einmal links mit S zusammen, so ergeben sich die beiden Kongruenzen

$$\bar{S}\,\Omega_\chi \equiv 0, \ (m) \qquad \Omega_\chi S_1 \equiv 0, \ (m_1),$$

und ähnlich schließt man aus der zweiten Kongruenz der Voraussetzung

$$\bar{S}'\,\Omega'_\chi \equiv 0, \ (m') \qquad \Omega'_\chi S'_1 \equiv 0, \ (m'_1).$$

Hieraus folgen, weil $\bar{S}''$ ein Rechtsvielfaches von $\bar{S}$ und $\bar{S}'$, und S''_1 ein Linksvielfaches von S_1 und S'_1 ist, die vier Kongruenzen

$$\bar{S}''\,\Omega_\chi \equiv 0, \ (m) \qquad \Omega_\chi S''_1 \equiv 0, \ (m_1)$$
$$\bar{S}''\,\Omega'_\chi \equiv 0, \ (m') \qquad \Omega'_\chi S''_1 \equiv 0, \ (m'_1).$$

Aus diesen entnehmen wir, daß

$$S''\,\Omega_\chi \Omega'_\chi S''_1 \equiv 0, \ (m m'_1) \qquad \bar{S}''\,\Omega'_\chi \Omega_\chi S''_1 \equiv 0, \ (m' m_1).$$

Es ist also für $\Omega''_\chi = \Omega_\chi \Omega'_\chi = \Omega'_\chi \Omega_\chi$ die linke Seite der Kongruenz der Behauptung durch $m m'_1$ wie auch durch $m' m_1$ teilbar.

36. Aus Satz XVIII ergibt sich die Existenz zweier ganzzahligen Substitutionen $\Omega_{\varphi'_1}$ und Ω'_{φ_1}, die den Gleichungen

$$\Omega_\chi S'_1 = S'_1 \Omega_{\varphi'_1} \qquad \Omega'_\chi S_1 = S_1 \Omega'_{\varphi_1}$$

genügen. (Sind nämlich Ω_χ, Ω'_χ mit den Zahlen t, u; t', u' gebildete Hemiautomorphe von χ, so sind $\Omega_{\varphi'_1}$, Ω'_{φ_1} die mit denselben Zahlen t, u; t', u' gebildeten Hemiautomorphen von φ'_1 und φ_1.) Demnach ist

$$\bar{S}\,\Omega_\chi \Omega'_\chi S_1 = \bar{S}\,\Omega_\chi S_1 \Omega'_{\varphi_1} \equiv 0, \ (m m_1)$$

nach der ersten Kongruenz der Voraussetzung und ebenso

$$\bar{S}'\,\Omega'_\chi\,\Omega_\chi\,S'_1 = \bar{S}'\,\Omega'_\chi\,S'_1\,\Omega_{\varphi'_1} \equiv 0, \quad (m'm'_1)$$

nach der zweiten Kongruenz der Voraussetzung. Hieraus folgen, weil $\bar{S}''$ ein Rechtsvielfaches von $\bar{S}$ und $\bar{S}'$, und S''_1 ein Linksvielfaches von S_1 und S'_1 ist, die beiden Kongruenzen

$$\bar{S}''\,\Omega_\chi\,\Omega'_\chi\,S''_1 \equiv 0, \quad (mm_1) \qquad \bar{S}''\,\Omega'_\chi\,\Omega_\chi\,S''_1 \equiv 0, \quad (m'm'_1),$$

und diese zeigen, daß für $\Omega''_\chi = \Omega_\chi\,\Omega'_\chi = \Omega'_\chi\,\Omega_\chi$ die linke Seite der Kongruenz der Behauptung sowohl durch mm_1 wie durch $m'm'_1$ teilbar ist.

37. Damit ist, nach dem, was oben bemerkt wurde, der Fundamentalsatz vollständig bewiesen. Als Ergänzung dazu kann der folgende Satz angesehn werden.

Satz XXIV. Ist relativ der Grundform χ aus den Formen φ und φ' die Form φ'', relativ der Grundform χ_1 aus den Formen φ und φ' aber die Form φ''_1 zusammengesetzt, so ist stets φ'' äquivalent φ''_1, sobald χ äquivalent χ_1 ist.

Dieser Satz ergibt sich unter Benutzung des Fundamentalsatzes als eine Folgerung der unmittelbar einleuchtenden Tatsache: Wenn aus S und S' die Substitution S'' kongruent komponiert und U eine beliebige unimodulare Substitution ist, so ist aus den Substitutionen US und US' die Substitution US'' kongruent komponiert.

Darnach kann der Fundamentalsatz auch in der folgenden erweiterten Form ausgesprochen werden:

Satz XXV. Wenn relativ der Grundform χ aus den Formen φ und φ' die Form φ'' und relativ der Grundform χ_1 aus den Formen φ_1 und φ'_1 die Form φ''_1 zusammengesetzt ist, so ist stets φ'' äquivalent φ''_1, sobald χ äquivalent χ_1, φ äquivalent φ_1 und φ' äquivalent φ'_1 ist.

4. Kapitel. Die Komposition der Klassen relativ einer Grundklasse.

38. Der Fundamentalsatz erlaubt, die unter Nr. 28 gegebenen Definitionen von den Formen auf die Klassen auszudehnen.

Wir bezeichnen die Grundklasse durch den Buchstaben G und durch K, K', K'' ... die Klassen der Formen φ, φ', φ'' .... Ist dann relativ der Grundform χ aus den Formen φ und φ' die Form φ'' zusammengesetzt, so nennen wir entsprechend *die Klasse K'' relativ der Grundklasse G aus*

den Klassen K und K′ zusammengesetzt oder komponiert und sprechen auch kurz von den zu *komponierenden Klassen K und K′* und von der *komponierten Klasse K″*.

In Anlehnung an eine von *Gauß* eingeführte Symbolik*) bringen wir diese Beziehung zwischen den vier Klassen G, K, K', K'' durch die symbolische Formel zum Ausdruck

$$K + K' = K'', \ (G),$$

lies: K plus K' gleich K'' relativ G.

Weshalb wir dabei wieder zu der *Gauß*schen additiven Schreibweise zurückkehren und nicht die später üblich gewordene multiplikative Schreibweise**) benutzen, wird nachher von selbst klar werden.

39. Eine besondere Rolle spielt die Komposition der Klassen relativ derjenigen Grundklasse, deren Formen imstande sind, die Zahl 1 darzustellen. Diese Klasse, der die Hauptform $\eta = (1, \varepsilon, -d)$ angehört, heißt *Hauptklasse* und werde durch H bezeichnet. Hier gilt der

Satz XXVI. Die Komposition der Klassen relativ der Hauptklasse ist mit der Gaußschen Kompositionstheorie (sofern man sie auf Klassen gleicher Diskriminante beschränkt) identisch.

Sind nämlich K und K' irgend zwei Klassen mit zueinander primen Teilern, eine Bedingung, welche unsere Theorie sowohl wie die *Gauß*sche erfordert, so kann man stets in K eine Form $\varphi = (a, b, c)$ und in K' eine Form $\varphi' = (a', b', c')$ so auswählen, daß a zu a' prim wird***). Dann zeigen aber die Betrachtungen in Nr. 29, daß man aus φ und φ' eine Form $\varphi'' = (a'', b'', c'')$ herleiten kann, die sowohl in unserm Sinne relativ der Hauptform η wie auch im *Gauß*schen Sinne aus φ und φ' komponiert ist.

Der Satz zeigt, daß die symbolische Formel $K + K' = K''$, (H) mit der *Gauß*schen $K + K' = K''$ gleichbedeutend ist†).

40. Unsere Symbolik schließt aber nicht nur die *Gauß*sche als

---

*) Disq. arithm. art. 249.

**) *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie, IV. Auflage, S. 392.

***) Ist D ein Quadrat, so sei für a, a' das Zahlenpaar 0, 1 ausgeschlossen.

†) Es macht auch keine Schwierigkeit, von unserer Theorie aus den Anschluß an die bilineare Substitution der *Gauß*schen Theorie zu gewinnen.

speziellen Fall in sich, sondern gehorcht auch bei beliebiger Grundklasse denselben formalen Gesetzen wie diese. Aus der Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes für die Kongruenzkomposition der Substitutionen (Nr. 13) folgt die Gültigkeit dieser Gesetze für die Komposition der Formenklassen. Es ist also

$$K + K' = K' + K, \ (G)$$

und

$$(K + K') + K'' = K + (K' + K''), \ (G),$$

so daß unter Fortlassung der Klammern für diese beiden Ausdrücke auch

$$K + K' + K'', \ (G)$$

geschrieben werden kann. Dies Zeichen, bei dem drei Klassensymbole additiv verknüpft sind, hat also stets eine bestimmte Bedeutung, sobald die Komposition überhaupt möglich ist, d. h. sobald die Teiler der drei Klassen zu je zweien prim sind. Allgemeiner hat das Zeichen

$$K + K' + \cdots + K^{(n-1)}, \ (G)$$

einen eindeutig bestimmten Sinn, sobald die Teiler der n Klassen $K, K', \ldots K^{(n-1)}$ zu je zweien prim sind.

Ist speziell K eine primitive Klasse, so schreiben wir für die n-malige Komposition $K + K + \cdots + K$ kurz nK, (G).

Für die symbolische Rechnung der Klassenkomposition gelten also alle Regeln der gewöhnlichen Addition.

41. Es gibt eine Klasse, die bei der Komposition dieselbe Rolle spielt wie die Null bei der Addition, d. i. die Grundklasse. Für eine beliebige Klasse K ist nämlich stets

$$K + G = K, \ (G),$$

d. h. in Worten:

Satz XXVII. Durch Komposition einer beliebigen Klasse K mit der Grundklasse G entsteht wieder die Klasse K.

Dieser Satz ist eine Folge der einfachen Tatsache, daß jede Substitution aus sich selbst und der Einheitssubstitution kongruent komponiert ist. Speziell ist

$$G + G = G, \ (G),$$

d. h. in Worten:

Satz XXVIII. Durch Komposition der Grundklasse mit sich selbst entsteht wieder die Grundklasse.

Bemerkenswert ist der Zusammenhang dieser beiden Sätze mit den Sätzen XVIII und XVII.

Die Grundklasse spielt in unserer Theorie eine ähnliche Rolle wie die Hauptklasse in der *Gauß*schen Theorie*).

42. Von besonderer Wichtigkeit ist die Komposition der primitiven Klassen. Für ihre Symbolik gelten nicht nur die Regeln der Addition, sondern auch die der Subtraktion. Um das einzusehn, leiten wir zunächst den folgenden Satz ab.

Satz XXIX. Sind χ und φ zwei beliebige primitive Formen, so gibt es stets Formen φ', so daß relativ der Grundform χ aus φ und φ' eine der Grundform äquivalente Form χ' komponiert ist.

Zum Beweise bestimme man zunächst zwei zur Grundform χ gehörige, die Form φ erzeugende Substitutionen S, S' mit zueinander primen Determinanten m, m', was nach Satz XV möglich ist. Dann ist die Substitution $S\bar{S}' = \Omega_\chi$ eine Hemiautomorphe der Grundform oder, was dasselbe ist, eine die Grundform selbst wieder erzeugende Substitution mit der Determinante mm'. Man kann daher nach Satz XII und Satz XX zwei Erzeugende T, T' mit den Determinanten m, m' bestimmen, aus denen Ω_χ kongruent komponiert ist. Jetzt sind die Substitutionen S, T, die beide die gleiche Determinante m haben, rechts äquivalent; denn da T ein linksseitiger Teiler von Ω_χ ist, hat man

$$\bar{T}S\bar{S}' \equiv 0, \ (m),$$

woraus, wenn man die linke Seite rechts mit S' zusammensetzt und beachtet, daß m' prim zu m ist, die Kongruenz

$$\bar{T}S \equiv 0, \ (m),$$

d. h. die Bedingung der rechtsseitigen Äquivalenz folgt. Es gibt also eine unimodulare Substitution U (nämlich die Substitution $\frac{1}{m}\bar{T}S$), so daß

$$TU = S$$

wird. Da Ω_χ aus T und T' kongruent komponiert ist, so ist $\Omega_\chi U$ aus

---

*) Vgl. *Dirichlet-Dedekind*, IV. Aufl. § 148.

$TU = S$ und $T'U$ kongruent komponiert. Ist dann χ' die Form, in die χ durch U transformiert wird, d. h. die durch $\Omega_\chi U$ erzeugte Form und φ' die durch $T'U$ erzeugte Form, so ist, wie es der Satz verlangt, aus φ und φ' eine der Grundform äquivalente Form χ' komponiert.

Beispiel: Ist $\chi = (1, 0, 11)$, $\varphi = (3, 2, 4)$ und wählt man etwa $S = \left\| \begin{matrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|$, $S' = \left\| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, so daß $m = 4$, $m' = 3$, so wird $\Omega_\chi = \left\| \begin{matrix} 1 & 11 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|$, und man kann $T = \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|$, $T' = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|$ annehmen (denn es ist $|T| = 4$, $|T'| = 3$ und $T \equiv \Omega_\chi$, (4), $T' \equiv \Omega_\chi$, (3)). Dann ergibt sich $U = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$ und $T'U = \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|$, also $\chi' = (1, 2, 12)$ und $\varphi' = (4, 2, 3)$. Demnach ist relativ (1, 0,11) aus (3, 2, 4) und (4, 2, 3) die der Grundform äquivalente Form (1, 2, 12) zusammengesetzt.

43. Geht man beim letzten Satz von den Formen zu den Klassen über, so erhält man den

Satz XXX. Zu jeder primitiven Klasse K kann stets eine Klasse K' bestimmt werden, so daß

$$K + K' = G, \ (G).$$

Gäbe es noch eine zweite von K verschiedene Klasse K_1', so daß auch

$$K + K_1' = G, \ (G)$$

wäre, so folgte aus diesen beiden symbolischen Gleichungen wegen der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes $G + K_1' = G + K'$, (G) und hieraus nach Satz XXVII im Widerspruch zu der Annahme

$$K_1' = K', \ (G).$$

Die Klasse K' ist also eindeutig bestimmt und soll die zu K *relativ G entgegengesetzte Klasse* heißen. Offenbar ist auch K die zu K' relativ G entgegengesetzte Klasse, so daß auch K und K' als *einander relativ G entgegengesetzte Klassen* bezeichnet werden können.

Die Klassen K und K' spielen in unserer Symbolik dieselbe Rolle wie zwei sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheidende Zahlen in der Addition. Da die Gültigkeit der Regeln der Addition schon nachgewiesen ist, können wir zu keinem Widerspruch geführt werden, wenn wir die Klasse K' durch $-K$ bezeichnen und mit dem Zeichen $-K$ nach den Regeln der gewöhnlichen Subtraktion rechnen. Dabei ist darauf zu achten,

daß das Zeichen $-K$ nur für primitive Klassen K definiert ist und erst nach Angabe der Grundklasse G einen Sinn hat, so daß wir, wenn ein Zweifel über die gewählte Grundklasse bestehn kann, $-K, (G)$ schreiben müssen.

44. Ist K eine primitive Klasse, so folgt aus der symbolischen Formel

$$K + K' = K'', \ (G)$$

durch beiderseitige Subtraktion von K

$$K'' - K = K', \ (G).$$

Ist auch K' eine primitive Klasse, so hat man ebenso

$$K'' - K' = K, \ (G).$$

45. Die bisher abgeleiteten Gesetze der Klassenkomposition lassen erkennen, daß die primitiven Klassen gleicher Diskriminante, die wie bekannt in endlicher Anzahl vorhanden sind, eine *Abel*sche Gruppe bilden, sobald man als Verknüpfungsgesetz die Komposition der Klassen relativ einer zwar beliebigen, aber bestimmten Grundklasse annimmt. Daher dürfen wir auch die allgemeinen Sätze der Gruppentheorie auf die Kompositionstheorie anwenden. Der Satz, daß jede endliche *Abel*sche Gruppe eine Basis besitzt, besagt dann in unserer symbolischen Schreibweise:

Satz XXXI. Unter den primitiven Klassen der Diskriminante D kann stets eine endliche Anzahl von n Klassen $K_1, K_2, \dots K_n$ ausgewählt werden, so daß jede primitive Klasse K eindeutig in der Form

$$K = \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2 + \cdots + \xi_n K_n, \ (G)$$

darstellbar ist, wo die ξ_ι positive ganze Zahlen sind, die einem Bereich

$$0 \leqq \xi_\iota < \nu_\iota \qquad (\iota = 1, 2, \dots n)$$

angehören, wobei $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n$ der Anzahl h der sämtlichen primitiven Klassen der Diskriminante D gleich ist.

Die Anzahl n ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, doch kann man eine Basis so wählen, daß die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ die Eigenschaft haben, daß jede von ihnen durch die folgende teilbar ist. Dann erhält man einen bestimmten und zugleich möglichst kleinen Wert für n.

Für die *Gauß*sche Kompositionstheorie war der Satz XXXI schon *Gauß* selbst bekannt*), einen vollständigen Beweis gab *Schering***).

---

*) *Gauß*, Disqu. arithm. art. 305—307.

**) *Schering*, Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Göttingen 1869 oder Werke Bd. I, S. 135.

5. Kapitel. Der Übergang zu einer neuen Grundklasse.

46. Wir haben bisher die Grundform oder doch wenigstens die Grundklasse zwar beliebig, aber doch bestimmt gewählt angenommen. Es zeigte sich, daß bei zwei zu komponierenden Formen und fest gegebener Grundform alle komponierten Formen einer eindeutig bestimmten Klasse angehören. Diese Eindeutigkeit der komponierten Klasse blieb auch noch bestehn, wenn die Grundform durch eine beliebige äquivalente ersetzt wurde. Naturgemäß wird man aber eine Änderung der komponierten Klasse erwarten, wenn die Grundform durch eine andre, ihr nicht äquivalente, ersetzt wird. In der Tat findet eine solche Änderung auch statt, und es fragt sich nur, nach welchem Gesetz sie erfolgt.

Die Antwort auf diese Frage liefert uns der folgende Satz.

47. *Satz XXXII. Ist relativ der Grundform χ aus den Formen φ und φ' die Form φ'', relativ der Grundform χ' aber aus denselben Formen φ und φ' die Form φ''' zusammengesetzt, so ist jede relativ der Grundform χ' aus φ'' und χ zusammengesetzte Form φ^{IV} der Form φ''' äquivalent.*

Zur Erläuterung des Satzes vergleiche man die Beispiele unter Nr. 28 und 29. Dieser Satz sagt nur dann etwas Neues aus, wenn χ und χ' verschiedenen Klassen angehören. Sind nämlich χ und χ' äquivalent, so ist er inhaltlich, wie aus Satz XXVII folgt, mit dem Satz XXIV identisch. Der folgende Beweis ist aber im einen wie im andern Fall gültig. Wegen des Fundamentalsatzes ist es offenbar nicht erforderlich zu zeigen, daß *jede* relativ χ' aus φ und φ' komponierte Form φ''' *jeder* relativ χ' aus φ'' und χ komponierten Form φ^{IV} äquivalent ist, sondern es genügt zu zeigen, daß *eine* der Formen φ''' *einer* der Formen φ^{IV} äquivalent ist.

48. Um diesen Nachweis zu führen, seien S, S', S'' drei zur Grundform χ gehörige, die Formen $\varphi, \varphi', \varphi''$ erzeugende Substitutionen, von denen die dritte aus den beiden ersten kongruent komponiert sei, und es werde gesetzt $|S| = m$, $|S'| = m'$, $|S''| = m''$, so daß m zu m' prim und $m'' = mm'$ ist. Unter den zur Grundform χ' gehörigen, die Form χ erzeugenden Substitutionen können nun zwei solche T, T' bestimmt werden, deren Determinanten n, n' sowohl unter sich wie auch beide zu m und zu m' prim sind, wie aus Satz XV folgt. Dann sind die vier Zahlen m, m', n, n' zu je zweien prim.

Offenbar sind jetzt TS und $T'S'$ zur Grundform χ' gehörige, die Formen φ und φ' erzeugende Substitutionen, und ihre Determinanten, nämlich nm und $n'm'$, sind zueinander prim. Man kann daher eine aus TS und $T'S'$ kongruent komponierte Substitution S''' bestimmen, welche aus χ' eine Form φ''' erzeugt, die relativ χ' aus φ und φ' komponiert ist.

Ferner sind TS'' und T' zur Grundform χ' gehörige, die Formen φ'' und χ erzeugende Substitutionen, und ihre Determinanten, nämlich nmm' und n', sind zueinander prim. Man kann daher eine aus TS'' und T' kongruent komponierte Substitution S^{IV} bestimmen, welche aus χ' eine Form φ^{IV} erzeugt, die relativ χ' aus φ'' und χ komponiert ist.

Wir beweisen nun die behauptete Äquivalenz der Formen φ''' und φ^{IV}, indem wir zeigen, daß die beiden sie aus χ' erzeugenden Substitutionen S''' und S^{IV} rechtsseitig äquivalent sind.

49. Dazu ist nach Nr. 6, weil $|S'''| = |S^{IV}| = mm'nn'$, nur das Bestehn der Kongruenz

$$\bar{S}''' S^{IV} \equiv 0, \ (mm'nn')$$

zu beweisen. Dies erledigen wir durch den Nachweis, daß die Substitution $\bar{S}'''\ S^{IV}$ durch mn, durch n' und auch durch m' teilbar ist; da m, m', n, n' zu je zweien prim sind, ist damit zugleich die Teilbarkeit durch $mm'nn'$ bewiesen. Dabei stützen wir uns lediglich auf die Tatsache, daß S''' ein Linksvielfaches von TS und $T'S'$, und S^{IV} ein Linksvielfaches von TS'' und T' ist.

Weil nämlich $S''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (TS)$, also $\bar{S}''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (\bar{S}\bar{T})$, und $S^{IV} \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (TS'')$, also auch $S^{IV} \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (TS)$, so entsteht $\bar{S}''' S^{IV}$ durch links- und rechtsseitige Zusammensetzung mit gewissen ganzzahligen Substitutionen aus der durch mn teilbaren Substitution $\bar{S}\bar{T}TS = mnE$, ist also selbst durch mn teilbar.

Weil ferner $S''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (T'S')$, also auch $S''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (T')$ oder $\bar{S}''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (\bar{T}')$, und $S^{IV} \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (T')$, so entsteht $\bar{S}''' S^{IV}$ auch durch links- und rechtsseitige Zusammensetzung mit gewissen ganzzahligen Substitutionen aus der durch n' teilbaren Substitution $\bar{T}'T' = n'E$, ist also selbst durch n' teilbar.

Um aber endlich einzusehn, daß die Substitution $\bar{S}''' S^{IV}$ auch durch m' teilbar ist, bemerke man zuerst, daß $\bar{S}''' \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (\bar{S}'\bar{T}')$ und $S^{IV} \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (TS'')$, also auch $S^{IV} \underset{\cdot}{\equiv} 0, \ (TS')$, so daß $\bar{S}''' S^{IV}$ durch links- und rechtsseitige

Zusammensetzung mit ganzzahligen Substitutionen aus der Substitution $\bar{S}'\bar{T}'TS'$ entsteht. Diese ist aber durch m' teilbar. Weil nämlich $\bar{T}'T$ zufolge der Bedeutung von T, T' eine Hemiautomorphe Ω_χ von χ ist, so gibt es nach Satz XVIII eine ganzzahlige Substitution $\Omega_{\varphi'}$, so daß $\Omega_\chi S' = S'\Omega_{\varphi'}$. Daher ist $\bar{S}'\bar{T}'TS' = \bar{S}'\Omega_\chi S' = \bar{S}'S'\Omega_{\varphi'} = m'\Omega_{\varphi'}$, also durch m' teilbar.

Damit ist das Bestehn der behaupteten Kongruenz bewiesen und der Beweis des Satzes XXXII vollständig geführt.

50. Überträgt man das Resultat von den Formen auf die Klassen und bezeichnet dabei die Klassen der Formen χ, χ', φ, φ', φ'', φ''' durch G, G', K, K', K'', K''', so besagt es folgendes:

Satz XXXIII. Ist relativ der Grundklasse G aus den Klassen K und K' die Klasse K'' zusammengesetzt, so erhält man die relativ einer neuen Grundklasse G' aus K und K' zusammengesetzte Klasse K''', indem man relativ der neuen Grundklasse G' die alte komponierte Klasse K'' mit der alten Grundklasse G zusammensetzt.

Unter Verwendung der in Nr. 38 eingeführten Symbolik heißt das: Mit dem Bestehn der beiden symbolischen Formeln

$$K + K' = K'', \ (G)$$
$$K + K' = K''', \ (G')$$

ist stets das Bestehn der andern

$$K'' + G = K''', \ (G')$$

verbunden; vertauscht man hier G und G', so gewinnt man noch die ähnliche Formel

$$K''' + G' = K'', \ (G).$$

Da G, G' primitive Klassen sind, gibt es eine zu G relativ G' entgegengesetzte Klasse $-G$, (G') und eine zu G' relativ G entgegengesetzte Klasse $-G'$, (G). Führt man diese neuen Klassen in die vorhergehenden Formeln ein, so hat man nach Nr. 44

$$K''' - G = K'', \ (G')$$
$$K'' - G' = K''', \ (G).$$

Die letzte dieser Formeln zeigt, wie man relativ der alten Grundklasse die neue komponierte Klasse K''' bestimmen kann.

51. Die symbolischen Formeln der vorigen Nummer zeigen eine auffallende Analogie zu einfachen geometrischen Formeln.

Sind nämlich O, P, P' drei Punkte eines Raumes von beliebiger Dimensionenzahl, so werde diesen drei Punkten ein vierter P'' durch die Gleichung

$$OP + OP' = OP''$$

zugeordnet, die bedeuten soll, daß der Vektor OP'' die Summe der Vektoren OP und OP' sei, so daß P'' der vierte O gegenüberliegende Eckpunkt eines Parallelogramms wird, dessen drei übrige Ecken O, P, P' sind.

Diese Gleichung wollen wir, um die Analogie vollkommener zu machen, in der neuen Form schreiben

$$P + P' = P'', \ (O),$$

lies: P plus P' gleich P'' relativ O, und entsprechend dieser neuen Schreibweise den Punkt P'' die relativ des *Grundpunktes* O genommene *Summe der Punkte* P *und* P' nennen.

Ist nun O' ein neuer Grundpunkt und P''' so bestimmt, daß

$$P + P' = P''', \ (O'),$$

so überzeugt man sich leicht, daß stets die Gleichungen

$$P'' + O = P''', \ (O')$$
$$P''' + O' = P'', \ (O)$$

erfüllt sind, die noch ergänzt werden können durch die beiden folgenden:

$$P''' - O = P'', \ (O')$$
$$P'' - O' = P''', \ (O).$$

Dabei kann $-O$, (O') als Punkt aufgefaßt werden, der durch die Gleichung $O + (-O) = O'$, (O'), für die wir kurz $O - O = O'$, (O') schreiben, definiert ist, und eine ähnliche Bedeutung hat $-O'$, (O).

Die vorstehenden Formeln zeigen, daß eine vollständige formale Analogie zwischen der Komposition der Klassen relativ einer Grundklasse und der Addition der Punkte relativ eines Grundpunktes besteht.

Es fragt sich daher, ob es nicht überhaupt möglich ist, die Formenklassen einer gegebenen Diskriminante und in gewisser Weise ausgewählte Punkte so aufeinander zu beziehn, daß die beiden Operationen der Komposition der Klassen und der Addition der Punkte vollständig parallel laufen, derart, daß die komponierte Klasse auch stets wieder dem durch Addition gewonnenen Punkte entspricht und umgekehrt.

52. Eine solche gegenseitige Zuordnung von Punkten und Klassen ist nun für die primitiven Klassen tatsächlich möglich.

Bilden nämlich für die Komposition relativ der Grundklasse G die Klassen $K_1, K_2, \dots K_n$ eine Basis des Systems der primitiven Klassen, so daß nach Satz XXXI jede primitive Klasse K in der Gestalt

$$K = \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2 + \cdots + \xi_n K_n, \ (G)$$

darstellbar ist, so ordne man jeder solchen Darstellung den Gitterpunkt mit den cartesischen Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ in einem n-dimensionalen Raume zu, so daß jeder Klasse ein Gitterpunkt, der Grundklasse speziell der Anfangs- oder Grundpunkt entspricht. Damit aber auch jedem Gitterpunkt eine Klasse zugewiesen wird und die Addition der Punkte unbeschränkt ausgeführt werden kann, wird man dabei nicht wie früher die ξ_ι auf das Intervall $0 \leqq \xi_\iota < \nu_\iota$ beschränken, sondern unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte durchlaufen lassen. Dann ergeben nach bekannten Gruppeneigenschaften immer zwei Wertsysteme ξ_ι, ξ_ι' und damit auch die entsprechenden Punkte dieselbe Klasse, wenn die Kongruenzen $\xi_\iota \equiv \xi_\iota' \equiv 0, (\nu_\iota)$ erfüllt sind. Der ganze unendliche Raum wird also in lauter Parallelepipede mit den Kantenlängen $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ eingeteilt, deren jedes $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n = h$ Punkte enthält, die sämtliche Klassen und auch jede nur einmal repräsentieren.

Sind jetzt drei Klassen K, K', K'' gegeben, von denen die dritte relativ G aus den beiden ersten komponiert ist, und hat man K, K' irgendwie in der Gestalt

$$K = \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2 + \cdots + \xi_n K_n, \ (G)$$
$$K' = \xi_1' K_1 + \xi_2' K_2 + \cdots + \xi_n' K_n, \ (G)$$

dargestellt, so ist

$$K'' = \xi_1'' K_1 + \xi_2'' K_2 + \cdots + \xi_n'' K_n, \ (G),$$

wenn

$$\xi_\iota'' = \xi_\iota + \xi_\iota' \qquad (\iota = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt ist. Bezeichnet man daher die Punkte mit den Koordinaten $\xi_\iota, \xi_\iota', \xi_\iota''$ durch P, P', P'' und den Anfangspunkt mit O, so ist mit

$$K + K' = K'', \ (G)$$

gleichzeitig

$$P + P' = P'', \ (O).$$

Ist umgekehrt für irgendwelche Punkte P, P', P'' die letzte Gleichung erfüllt, so gilt für die entsprechenden Klassen auch die vorhergehende.

53. Das geometrische Bild gewinnt dadurch an Interesse, daß es unabhängig von der Wahl der Grundklasse und des entsprechenden Grundpunktes ist. Weil nämlich die Transformationsformeln für den Übergang zu einer neuen Grundklasse (Nr. 50) den Transformationsformeln für den Übergang zu einem neuen Grundpunkt (Nr. 51) vollständig analog gebaut sind, so gilt eine geometrische Repräsentation, die für das System der primitiven Klassen unter Annahme der Grundklasse G gefunden ist, gleichzeitig für jede andre Grundklasse G'. Um die aus K und K' relativ der beliebig gewählten Grundklasse G' komponierte Klasse zu finden, braucht man nur den Klassen K, K', G' entsprechende Punkte P, P', O' aufzusuchen, die Summe von P und P' relativ O' zu bilden und umgekehrt zu dem erhaltenen Punkt P''' wieder die entsprechende Klasse K''' zu suchen.

Ein Beispiel wird dies noch deutlicher machen. Für $D = -84$ hat man vier primitive Klassen H, K, K', K'', die der Reihe nach durch die Formen $(1, 0, 21)$, $(3, 0, 7)$, $(2, 2, 11)$, $(5, 4, 5)$ repräsentiert werden können. Nimmt man H als Grundklasse, so ist $2K = 2K' = H$, (H) und $K + K' = K''$, (H). Es können also die Klassen K und K' als Basis angenommen werden, so daß $\nu_1 = \nu_2 = 2$ ist. Man erhält daher das folgende Bild, aus dem sämtliche möglichen Kompositionsformeln unter der Annahme einer beliebigen Grundklasse abgelesen werden können.

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	H	K	H	K	H	K	H	.	.
.	.	K'	K''	K'	K''	K'	K''	K'	.	.
.	.	H	K	H	K	H	K	H	.	.
.	.	K'	K''	K'	K''	K'	K''	K'	.	.
.	.	H	K	H	K	H	K	H	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

So ergeben sich unter anderm $H + K'' = K$, (K') oder $2K' = K$, (K).

Schluß.

Die im vorstehenden entwickelte Theorie ist einer vielseitigen Erweiterung fähig, weil die Begriffe der Kongruenzkomposition, der erzeugenden und der hemiautomorphen Substitution sich leicht verallgemeinern lassen.

Zunächst teilt sie mit der *Gauß*schen Theorie die Eigenschaft, daß sie ausgedehnt werden kann auf binäre quadratische Formen, deren Koeffizienten und Variabeln ganze komplexe Zahlen des Körpers der vierten Einheitswurzel sind. Ferner kann die Theorie auch auf zerlegbare Formen beliebigen Grades übertragen werden. Das liegt daran, daß die beiden fundamentalen Sätze XVII und XVIII, die die Hauptstütze unserer Theorie bilden, hier ihr Analogon finden.

Dies ist für die quadratischen Formen mit mehr als zwei Variabeln nicht mehr der Fall. Trotzdem scheint sich auch hier vor allem für die zunächst in Betracht kommenden ternären und quaternären Formen ein weites Feld für fruchtbare Untersuchungen zu eröffnen. Vielleicht existiert sogar für quaternäre quadratische Formen eine der obigen ähnliche Kompositionstheorie, bei der allerdings das kommutative Gesetz nicht mehr gilt.

Die Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen läßt sich auch auf gewisse, von *Kronecker* untersuchte Bilinearformen ausdehnen *). Das beruht auf der folgenden Tatsache: Wenn S eine zur Grundform $\chi = (g, h, k)$ gehörige, die Form $\varphi = (a, b, c)$ erzeugende Substitution mit der Determinante m und l eine beliebige ganze Zahl ist, die nur mit h gleichzeitig gerade oder ungerade ist, so transformiert die Substitution S stets die *Kronecker*sche Form $(g, \frac{1}{2}(h+l), \frac{1}{2}(h-l), k)$ in das m-fache der *Kronecker*schen Form $(a, \frac{1}{2}(b+l), \frac{1}{2}(b-l), c)$.

Eine Ausdehnung der Theorie auf die in mancher Beziehung ähnlichen *Hermite*schen Formen **) ist jedoch nicht möglich.

Karlsruhe, im Dezember 1917.

---

*) *Kronecker*, Werke 1, S. 143 oder Berliner Berichte 1866, S. 837.

**) *Hermite*, Oeuvres, t. I, p. 238 oder Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 47 (1854), S. 346.

Über algebraische Flächen.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Kiel.

Einer freundlichen Aufforderung von Herrn *Hensel* entsprechend gebe ich in den folgenden Zeilen eine Übersicht über den Inhalt eines Buches, dessen Erscheinen durch den Krieg verzögert wird. Das Buch handelt von den algebraischen Flächen im engeren Sinne. Es enthält also nichts über die zu den Flächen gehörigen Integrale. Vielleicht wird die Abgrenzung des Stoffes am klarsten, wenn ich auseinandersetze, welchem Teil der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen der Inhalt meines Buches innerhalb der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen entspricht. In dem Buche von *Hensel* und *Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (Leipzig 1902) sind in der 26sten Vorlesung die algebraischen ebenen Kurven unter Zugrundelegung homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3 behandelt*). Die singulären Stellen einer Kurve werden dadurch gefunden und charakterisiert, daß gewisse Determinanten aus den Koordinaten x_i und den Differentialen dx_i, d^2x_i in Primteiler zerlegt werden. Die Stellen, zu denen diese Primteiler gehören, sind die singulären Stellen. Der Primteiler und die zugehörige Stelle wird näher charakterisiert durch die Potenz, in der er in der Determinante enthalten ist. Vergleicht man in den Gleichungen, die die Zerlegungen angeben, die Ordnungen der links- und rechtsstehenden Determinanten und Divisoren, so erhält man die *Plücker*schen Gleichungen. Mein Buch enthält das Entsprechende für algebraische Flächen. An die Stelle der erwähnten Deter-

---

*) Man vergleiche auch *Hensel*, Über die Invarianten algebraischer Körper. Dieses Journal, Bd. 149, S. 125—146.

minanten treten Differentialinvarianten. An die Stelle der singulären Punkte treten singuläre Kurven, die dadurch bestimmt sind, daß längs ihrer eine oder mehrere der Differentialinvarianten Null werden. Ein Satz über diese Invarianten (vgl. Kap. III) liefert für die besonderen Kurven der Fläche eine Reihe von Äquivalenzen. Benutzt man dann den Satz, daß die Zahl $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ der Schnittpunkte zweier Kurven $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ungeändert bleibt, wenn man $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ oder beide durch ihnen äquivalente Kurven ersetzt, so erhält man den *Plücker*schen Gleichungen entsprechende *Salmon*sche Gleichungen.

Die folgende Übersicht erschöpft nicht den Inhalt des Buches. Sie soll nur eine Vorstellung von den angewandten Methoden und den damit erreichten Ergebnissen geben.

Ich benutze die Gelegenheit, einige Zusätze zu den letzten in diesem Journal von mir erschienenen Arbeiten zu machen und einige Irrtümer zu berichtigen, auf die Herr *M. Noether* so freundlich war, mich aufmerksam zu machen.

Zu meiner Arbeit: Über die *Cremona*sche Transformation der Ebene in Bd. 138 dieses Journals bemerke ich:

1.) Singuläre *Cremona*sche Transformationen findet man schon früher, z. B. in der Dissertation von *G. Rieß*, Erlangen 1893: Über die singulären eindeutigen Ebenen- und Raumtransformationen niederer Ordnung. Dort sind unter anderem sämtliche kubischen Transformationen aufgestellt.

2.) Die auf S. 257 unten angegebene Art, wie sich etwa beweisen ließe, daß sich auch alle singulären *Cremona*schen Transformationen aus quadratischen zusammensetzen lassen, ist nicht richtig. Auf die Art ist der Beweis nicht zu führen.

Zu meiner Arbeit: Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen in Bd. 142 dieses Journals (1913) bemerke ich:

Zu 3) S. 62. Daß ausgezeichnete Kurven erster Klasse einander schneiden können, ist auch schon von Herrn *M. Noether* bemerkt in seiner Arbeit in den Math. Annalen Bd. 29, Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke, und zwar auf S. 372—381 dieser Arbeit. Auch die Herren *Castelnuovo* und *Enriques* kennen diese Möglichkeit. Sie fassen zwei sich schneidende ausgezeichnete Kurven erster Klasse formal als eine Kurve auf. Vielleicht bin ich dadurch zu meiner irrtümlichen Auffassung gekommen, sie hätten diese Möglichkeit übersehen.

Zu 4) auf S. 62 und 5) auf S. 63. Die Invarianz von $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + a$ und $I + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ ist schon von Herrn *M. Noether* angegeben in seiner Arbeit in Bd. 8 der Math. Annalen (S. 526—528).

Kapitel I. Die Kurven auf einer algebraischen Fläche und die Zahl ihrer Schnittpunkte.

Es ist eine eigentümliche Tatsache, daß es nicht leicht ist, die Kurven auf einer algebraischen Fläche und die Zahl ihrer Schnittpunkte zu definieren. Es hängt das damit zusammen, daß weder die Kurven noch ihre Schnittpunkte bei birationalen Transformationen invariant sind.

§ 1. Der Körper T und seine Divisoren.

Den Betrachtungen wird zugrunde gelegt ein algebraischer Körper T von zwei unabhängigen Veränderlichen. Aus T werden irgend zwei voneinander unabhängige Größen φ, ψ ausgewählt. Die Stellen von T werden dann dadurch definiert, daß in der Umgebung jeder Stelle φ und ψ ganz bestimmte endliche oder unendlich große Werte annehmen sollen. Sind φ_0, ψ_0 die Werte, die φ, ψ an der Stelle S annehmen, so sind $\varphi - \varphi_0$, $\psi - \psi_0$ für die Umgebung von S als gewöhnliche Potenzreihen von zwei Hilfsgrößen u, v darstellbar, während alle andern Funktionen aus T entweder auch gewöhnliche Potenzreihen werden oder Quotienten solcher. Wir bezeichnen im folgenden durchgehends eine Stelle von T mit S und die zugehörigen Hilfsgrößen mit u, v.

Wir nennen einen algebraischen Körper P einer unabhängigen Veränderlichen einen Primteiler des Körpers T, wenn jede seiner Funktionen einer Funktion von T entspricht und wenn alle Gleichungen, die zwischen den Größen des Körpers T bestehen, auch für die ihnen entsprechenden Größen des Körpers P gelten. In bezug auf die analytische Definition zerfallen die Primteiler in zwei Arten. Ein Primteiler P der ersten Art kann folgendermaßen definiert werden. Ist S eine passend gewählte Stelle von T, so kann P für die Umgebung von S durch eine Gleichung zwischen den Hilfsgrößen u, v

$$P(u, v) = 0$$

definiert werden, wo $P(u, v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist, die für $u = v = 0$ verschwindet. $P(u, v)$ heißt die zugeordnete Funktion

von P für die Stelle S. Ist $\mathfrak{B}$ ein Primteiler zweiter Art, so gehört er zu einer ganz bestimmten Stelle S von T und wird in folgender Art definiert. Man setze

$$v = a_1 u^{\varepsilon_1} + a_2 u^{\varepsilon_2} + \cdots a_{l-1} u^{\varepsilon_{l-1}} + t u^{\varepsilon_l},$$

wo die a Konstanten sind und die ε positive rationale Zahlen, die der Bedingung $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots < \varepsilon_l$ genügen. Die Größe t ist ein Parameter. Diese Entwicklung für v setze man in die Funktionen von T ein, nachdem man sie als Funktionen der Hilfsgrößen u, v dargestellt hat, und entwickle nach Potenzen von u und setze dann $u = 0$. Es werden dadurch die Funktionen von T rationale Funktionen des Parameters t. Den Übergang von T zu einem Primteiler P drücken wir dadurch aus, daß wir sagen, wir setzen $P = 0$.

Wenn der Funktion R aus T im Körper P die Null entspricht, so sagen wir, R ist durch P teilbar. Es läßt sich ohne Mühe feststellen, in welcher Potenz P in R enthalten ist. Es zeigt sich, daß die Primteiler zweiter Art, die in einer Funktion R aus T enthalten sind, durch die der ersten Art mitbestimmt sind. Dem entspricht, daß ein Primteiler erster durch einen zweiter Art teilbar sein kann und daß man definieren kann, wie oft ein Primteiler zweiter in einem erster Art enthalten ist.

Irgendein Produkt von Primteilern heißt Divisor. Zwei Divisoren heißen äquivalent, wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers T darstellt. Man sagt auch, sie gehören derselben Klasse an.

§ 2. Die Fläche F.

Wir wählen aus T vier linear unabhängige, zueinander äquivalente ganze Divisoren erster Art,

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,$$

die keinen gemeinsamen Primteiler erster Art haben sollen, und setzen

$$A_0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4,$$

wo die λ Konstanten sein sollen. Es sind dann

$$(1) \qquad x_1 = \frac{A_1}{A_0},\ x_2 = \frac{A_2}{A_0},\ x_3 = \frac{A_3}{A_0},\ x_4 = \frac{A_4}{A_0},$$

Funktionen aus T, zwischen denen eine unzerlegbare algebraische Gleichung

$$(2) \qquad F(x) \equiv F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

besteht, die vom n-ten Grade sei. Deuten wir die x_a als homogene Koor-

dinaten eines Punktes (x) im Raume, so ist (2) die Gleichung einer algebraischen Fläche F n-ter Ordnung.

Wir verstehen unter A_α gleichzeitig die zugeordnete Funktion von A_α für die gerade betrachtete Stelle. Durch Multiplikation mit A_0^n folgt aus (2)

$$F(A) \equiv F(A_1, A_2, A_3, A_4) \equiv 0, \tag{3}$$

eine Gleichung, die identisch in u, v ist.

§ 3. Die Reziprokalfläche F'.

Aus (3) folgt

$$\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha F_\alpha(A) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial A_\alpha}{\partial u} F_\alpha(A) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial A_\alpha}{\partial v} F_\alpha(A) = 0, \tag{4}$$

wo unter $F_\alpha(A)$ die partielle Ableitung von F nach A_α zu verstehen ist. Wir setzen, unter ξ_α unbestimmte Größen verstehend, die Determinante

$$\left| \xi_\alpha, A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial u}, \frac{\partial A_\alpha}{\partial v} \right| \equiv \Sigma \xi_\alpha Z_\alpha. \tag{5}$$

Den größten gemeinsamen Teiler der hierdurch definierten Divisoren Z_α bezeichnen wir mit R und setzen

$$Z_\alpha = R A'_\alpha.$$

Aus (4) folgt, daß die $F_\alpha(A)$ proportional zu den Z_α sind, so daß wir setzen können

$$F_\alpha(A) = RDA'_\alpha = DZ_\alpha, \tag{6}$$

wo D ein ganzer Divisor ist.

Es wird R Null längs der Rückkehrkurven von F und D längs der mehrfachen Kurven. Abgesehen von in einem Punkt kondensierten Kurven ist D durch R^2 teilbar. Wir setzen

$$D = R^2 D_0. \tag{7}$$

Setzen wir, unter $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$ irgendwelche Konstanten verstehend,

$$A'_0 = \lambda'_1 A'_1 + \lambda'_2 A'_2 + \lambda'_3 A'_3 + \lambda'_4 A'_4$$

und

$$x'_1 = \frac{A'_1}{A'_0}, \quad x'_2 = \frac{A'_2}{A'_0}, \quad x'_3 = \frac{A'_3}{A'_0}, \quad x'_4 = \frac{A'_4}{A'_0}, \tag{8}$$

so sind die x'_α die Ebenenkoordinaten einer Berührungsebene (x') von F. Es sei F keine abwickelbare Fläche. Dann sind die x'_α Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen, und es besteht zwischen ihnen eine

homogene unzerlegbare Gleichung

$$F'(x') \equiv F'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0. \tag{9}$$

Es ist die Gleichung von F in Ebenenkoordinaten, oder, wenn wir die x' als Punktkoordinaten deuten, die Gleichung der Reziprokalfläche F' von F. Die Gleichung (9) sei vom Grade n' in den x', sodaß die Klasse von F gleich n' ist.

Geradeso wie wir von den Gleichungen (1) ausgegangen sind, können wir von den Gleichungen (8) ausgehen und kommen dann auf demselben Wege zur Gleichung (2). Setzen wir also, entsprechend (5), die Determinante

$$\left| \xi'_a, A'_a, \frac{\partial A'_a}{\partial u}, \frac{\partial A'_a}{\partial v} \right| \equiv \Sigma \xi'_a Z'_a, \tag{10}$$

so wird

$$Z'_a = R' A_a,$$

wo R' der größte gemeinsame Teiler der Z'_a ist. Ferner erhalten wir

$$F'_a(A'_a) = \frac{\partial F'(A')}{\partial A_a} R' D' A_a = R'^3 D'_0 A_a. \tag{11}$$

Es ist R' der Divisor der parabolischen Kurven und D'_0 der Divisor derjenigen Kurven von F, deren Punkte die Berührungspunkte der mehrfach berührenden Tangentialebenen sind.

Aus (6) und (11) ergeben sich die Äquivalenzen

$$R^3 D_0 A'_0 \sim A_0^{n-1}, \quad R'^3 D'_0 A_0 \sim A'^{n'-1}_0. \tag{12}$$

§ 4. Die Kurven auf F.

Es sei P ein Primteiler von T, erster oder zweiter Art. Was entspricht ihm auf F? Wir haben folgende vier Fälle:

1. Für $P = 0$ werden die Verhältnisse der x_a und die der x'_a nicht konstant. Es entspricht P auf der Fläche eine wirkliche Kurve, und die Tangentialebenen von F in ihren Punkten sind i. a. von einander verschieden.

2. Für $P = 0$ werden die Verhältnisse x_a nicht konstant, wohl aber die der x'_a. Es entspricht P auf F wieder eine wirkliche Kurve, aber in allen ihren Punkten hat F dieselbe Tangentialebene. Die Kurve ist also eben und ihre Ebene berührt F längs der Kurve. Wir nennen diese Kurven *ebene Berührungskurven.*

3. Für $P = 0$ werden die Verhältnisse der x_a konstant, während die der x'_a es nicht werden. Es entspricht P auf F eine in einen Punkt kondensierte Kurve, die Tangentialebenen von F in den verschiedenen Punkten der Kurve sind aber i. a. verschieden. Diese bilden die Tangentialebenen eines Kegels, dessen Spitze der Punkt ist, in den die Kurve kondensiert ist. Dieser Punkt ist ein isolierter singulärer Punkt von F und der Kegel der Berührungskegel von F in dem Punkte. Dieser Fall entpricht dem Falle 2 dual.

4. Für $P = 0$ werden die Verhältnisse der x_a und die der x'_a konstant. Es entspricht P auf F eine kondensierte Kurve, die gleichzeitig ebene Berührungskurve ist, wenn man in diesem Falle P überhaupt eine Kurve will entsprechen lassen. Der Punkt, der P entspricht, kann ein gewöhnlicher Punkt von F sein.

Es entsteht die Frage, ob man jedem Primteiler von T eine Kurve auf F will entsprechen lassen, vor allem, wenn der Fall 4 eintritt.

I. Es sei P von der ersten Art.

Der Fall 4 kann nur für eine endliche Zahl von Primteilern erster Art eintreten. Wir wollen P immer eine Kurve auf F entsprechen lassen, die mit $\mathfrak{P}$, also dem entsprechenden deutschen Buchstaben, bezeichnet sei.

II. Es sei P von der zweiten Art.

Wir bezeichnen den Primteiler P mit $\mathfrak{B}$. Er gehöre zur Stelle S_1. Da für $\mathfrak{B} = 0$ die Hilfsgrößen u, v beide Null werden, so können für $\mathfrak{B} = 0$ die Verhältnisse der x_a oder die der x'_a nur dann nicht konstant werden, wenn für $u = v = 0$ alle Funktionen A_a oder alle A'_a oder alle A_a und A'_a verschwinden. Stellen, wo dies eintritt, wollen wir ausgezeichnete Stellen des Körpers T nennen. Solcher gibt es nur eine endliche Zahl. Wir setzen zunächst fest, daß wir nur solchen Primteilern zweiter Art Kurven auf F wollen entsprechen lassen, die zu einer der ausgezeichneten Stellen gehören. Unter diesen treffen wir eine engere Auswahl in folgender Weise.

Es sei S_1 eine der ausgezeichneten Stellen. An der Stelle S_1 werden einige oder alle x_a, x'_a vollkommen unbestimmt, da Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden. Man kann aber ganze rationale Funktionen zweier neuen Hilfsgrößen λ, μ finden, die für $\lambda = \mu = 0$ verschwinden, und die

für u, v eingesetzt, die x_a, x_a' in gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ verwandeln. Durch eine endliche Zahl derartiger Entwicklungen erhält man die ganze Umgebung von $u = v = 0$. Eine der Darstellungen von u, v durch neue Hilfsgrößen λ, μ sei

$$u = u(\lambda, \mu), \quad v = v(\lambda, \mu). \tag{13}$$

Setzen wir diese Funktionen für u, v in x_a, x_a' ein, so gehen x_a, x_a' in gewöhnliche Potenzreihen von λ, μ über. Das ist aber nur dadurch möglich, daß sich ein Faktor forthebt, der eine für $\lambda = \mu = 0$ verschwindende gewöhnliche Potenzreihe von λ, μ ist. Da aber die A_a und ebenso die A_a' als Funktionen von u, v keinen gemeinsamen Teiler haben, so müssen $u(\lambda, \mu)$, $v(\lambda, \mu)$ einen gemeinsamen Teiler haben, der eine für $\lambda = \mu = 0$ verschwindende ganze rationale Funktion von λ, μ ist. Es sei $\delta(\lambda, \mu)$ ein solcher Teiler. Wir setzen voraus, daß $\delta(\lambda, \mu)$ nicht zerlegbar ist. Es enthalte δ die Größe λ, und es sei $\partial\delta/\partial\lambda \neq 0$ für $\lambda = \mu = 0$. Das können wir ohne Beschränkung annehmen, da wir sonst eine Stelle λ_0, μ_0 wählen, für die $\delta(\lambda_0, \mu_0) = 0$, $\dfrac{\partial\delta}{\partial\lambda}(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$ ist, und λ und μ ersetzen durch λ', μ' mit Hilfe der Gleichungen $\lambda = \lambda' + \lambda_0$, $\mu = \mu' + \mu_0$. Man kann übrigens immer erreichen, daß einfach $\delta \equiv \lambda$ ist.

Wir können dann aus der Gleichung

$$\delta(\lambda, \mu) = \nu$$

λ als gewöhnliche Potenzreihe von μ und ν ausrechnen. Setzen wir dies in (13) ein, so erhalten wir Gleichungen der Form

$$u = \nu^\alpha \{g_0(\mu) + g_1(\mu)\nu + \cdots\},$$
$$v = \nu^\beta \{h_0(\mu) + h_1(\mu)\nu + \cdots\},$$

wo die $g_a(\mu)$, $h_a(\mu)$ gewöhnliche Potenzreihen von μ sind. Die Zahlen α, β sind positiv, ganz und von Null verschieden. Durch Elimination von ν folgt aus diesen Gleichungen

$$v = a_0 u^{\frac{\beta}{\alpha}} + a_1 u^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \cdots.$$

Der erste Koeffizient a_i in dieser Entwicklung, der wirklich von μ abhängt, sei a_l. Wir setzen dann

$$v_1 \equiv a_0 u^{\frac{\beta}{\alpha}} + a_1 u^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \cdots + a_{l-1} u^{\frac{\beta+l-1}{\alpha}} + t u^{\frac{\beta+l}{\alpha}}.$$

Es ist durch $v = v_1$, wie oben auseinandergesetzt, ein Primteiler

zweiter Art definiert, der mit $\mathfrak{B}_1$ bezeichnet sei. Allen den Primteilern zweiter Art, die so wie $\mathfrak{B}_1$ gefunden werden, sollen Kurven auf F entsprechen, selbst, wenn sie gleichzeitig kondensiert und ebene Berührungskurven sein sollten. Man erhält solcher Primteiler nur eine endliche Zahl. Sie seien bezeichnet mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$. Die ihnen entsprechenden Kurven sollen geradeso bezeichnet sein. Wir nennen sie ausgezeichnete Kurven von F (in bezug auf T). Sie haben aber i. a. nichts Besonderes an sich. Nur sind sie immer vom Geschlechte Null.

Für $\mathfrak{B}_1 = 0$ besteht zwischen λ, μ die Gleichung $\nu = 0$ oder

$$\delta(\lambda, \mu) = 0.$$

Die Stellen der Kurve $\mathfrak{B}_1$ werden also charakterisiert durch die Werte λ, μ, die dieser Gleichung genügen. Wir nennen $\delta(\lambda, \mu)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_1$. Es hat also auch jede der ausgezeichneten Kurven eine zugeordnete Funktion für jede Stelle, durch die sie geht. Ist $P(u, v)$ die zugeordnete Funktion eines Primteilers erster Art, der durch die ausgezeichnete Stelle S_1 geht, zu der $\mathfrak{B}_1$ gehört, so wird auch $P(u, v)$ durch δ teilbar, wenn wir für u, v die Reihen (13) einführen. Ist P durch die π-te Potenz von δ teilbar, so sagen wir, der Primteiler P erster Art ist durch $\mathfrak{B}_1^\pi$ teilbar.

Unter den so bestimmten Primteilern $\mathfrak{B}_a$ gibt es immer solche, für die einer der drei im Anfang dieses Paragraphen angegebenen Fälle 1) bis 3) eintritt, und zwar sind alle diese unter den $\mathfrak{B}_a$ enthalten. Man könnte versucht sein, nur diesen Primteilern zweiter Art Kurven auf F entsprechen zu lassen. Aber es kann dann eintreten, daß die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven auf F eine gebrochene Zahl wird. Will man das nicht, so muß man schon zulassen, daß eine ausgezeichnete Kurve gleichzeitig kondensiert und ebene Berührungskurve sein kann. Und, was wichtiger ist, man hat bei der hier gewählten Definition der Kurven $\mathfrak{B}_a$ gleich die Stellen dieser Kurven mit ihren Umgebungen mit Hilfe zweier Parameter λ, μ analytisch definiert.

Als Kurven auf F lassen wir also gelten

1. die ϱ ausgezeichneten Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$, die den gleichbezeichneten Primteilern zweiter Art entsprechen. Wir setzen die Primteiler und Kurven gleich.

2. die den Primteilern erster Art entsprechenden Kurven. Hier können wir die Primteiler nicht einfach gleich den Kurven setzen. Es sei P ein Primteiler erster Art und $\mathfrak{P}$ die ihm entsprechende Kurve. Es gehe P durch eine der ausgezeichneten Stellen, z. B. durch die Stelle, zu der $\mathfrak{B}_1$ gehört. Es wird dann P durch den Primteiler $\mathfrak{B}_1$ zweiter Art teilbar. Wir bezeichnen mit sP das Produkt der in P enthaltenen ausgezeichneten Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$ und setzen

$$\mathfrak{P} = \frac{P}{sP},$$

sodaß $\mathfrak{P}$ der von den Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$ befreite Primteiler P ist. Wir nennen die so definierten Kurven von F Primkurven.

Die Divisoren A_a sind durch einige oder alle Primteiler $\mathfrak{B}_k$ teilbar, ebenso die A'_a. Wir bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler der A_a mit sA, den der A'_a mit sA' und setzen

$$\mathfrak{A}_a = \frac{A_a}{sA}, \qquad \mathfrak{A}'_a = \frac{A'_a}{sA'}.$$

Es ist $\mathfrak{A}_a$ die Schnittkurve der Ebene $x_a = 0$ mit F und $\mathfrak{A}'_a$ die Kurve, wo der von der Ecke $x'_a = 0$ aus an F gelegte Berührungskegel F berührt. Wir verstehen i. f. unter $\mathfrak{A}$ irgendeinen ebenen Schnitt und unter $\mathfrak{A}'$ die Berührungskurve irgendeines Berührungskegels.

Es gilt der Satz, daß jede Funktion des Körpers T, also jede homogene rationale Funktion der x_a oder x'_a sich in eine endliche Zahl von Primkurven zerlegen läßt. Das Produkt irgendwelcher Primkurven nennen wir Kurve. Zwei Kurven heißen äquivalent oder der gleichen Klasse angehörend, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht.

Ist S eine der nicht ausgezeichneten Stellen von T, so entspricht ihr und ihrer Umgebung eine Stelle auf F mit Umgebung. Ist aber S eine ausgezeichnete Stelle, so entspricht ihr auf F eine endliche Zahl von Kurven $\mathfrak{B}_a$, es entsprechen ihr also unendlich viele Stellen von F. Diese Stellen erhalten wir mit ihrer Umgebung dadurch, daß wir u, v in passender Weise als ganze rationale Funktionen zweier neuen Hilfsgrößen λ, μ darstellen, wie wir oben gezeigt haben.

§ 5. Die Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven auf F.

Es sei R eine Funktion aus T. In Primkurven zerlegt sei

$$R = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1}\,\mathfrak{P}_2^{\varrho_2}\cdots\mathfrak{P}_\lambda^{\varrho_\lambda}. \tag{14}$$

Es sei ferner $\mathfrak{P}$ eine von den Kurven $\mathfrak{P}_\alpha$ verschiedene Primkurve. Für $\mathfrak{P}=0$ gehen alle Funktionen aus T, also auch R, in Funktionen eines Körpers einer unabhängigen Veränderlichen über, den wir auch mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen und der uns durch die Kurve $\mathfrak{P}$ veranschaulicht wird. Die Funktion, die aus R für $\mathfrak{P}=0$ entsteht, sei mit r bezeichnet. Im Körper $\mathfrak{P}$ ist r in Primteiler dieses Körpers zerlegbar. Diese entsprechen den Stellen der Kurve $\mathfrak{P}$, wo r Null wird oder unendlich, also den Stellen, wo die Kurven $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\lambda$ die Kurve $\mathfrak{P}$ schneiden. Der Divisor, der die Zerlegung von r in Primteiler des Körpers $\mathfrak{P}$ angibt, sei $\mathfrak{r}$. Es wird also zu $\mathfrak{r}$ jede der Primkurven $\mathfrak{P}_\alpha$ einen ganz bestimmten Beitrag liefern, der den Schnittpunkten von $\mathfrak{P}_\alpha$ mit $\mathfrak{P}$ entspricht. Es gelingt in der Tat, den Divisor $\mathfrak{p}_\alpha$ des Körpers $\mathfrak{P}$, in den $\mathfrak{P}_\alpha$ bei $\mathfrak{P}=0$ übergeht, zu bestimmen, und zwar so, daß eine Funktion R, die durch (14) gegeben ist, für $\mathfrak{P}=0$ übergeht in $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1}\mathfrak{p}_2^{\varrho_2}\ldots\mathfrak{p}_\lambda^{\varrho_\lambda}$. Es liegt danach nahe, die Zahl der Schnittpunkte zweier voneinander verschiedener Primkurven $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ zu definieren als die Ordnung des Divisors $\mathfrak{p}'$, in den $\mathfrak{P}'$ für $\mathfrak{P}=0$ übergeht, oder besser als die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{p}')$, zu der die Divisoren von $\mathfrak{P}$ gehören, die für $\mathfrak{P}=0$ aus den Kurven der Klasse $(\mathfrak{P}')$ hervorgehen. Diese Definition gilt auch, wenn $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}$ identisch ist. Die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{P}', \mathfrak{P})$. Es ist

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}').$$

Ferner ist, wenn $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ äquivalente Kurven sind und sie für $\mathfrak{P}=0$ übergehen in $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$, auch $\mathfrak{q}_1$ äquivalent $\mathfrak{q}_2$ und daher

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{P}).$$

Sind jetzt $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ irgend zwei Kurven und ist, in Primkurven zerlegt,

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\ldots\mathfrak{P}_\alpha^{\lambda_\alpha},\quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}_1^{\mu_1}\mathfrak{P}_2^{\mu_2}\ldots\mathfrak{P}_\alpha^{\mu_\alpha},$$

so setzen wir die Zahl $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}')$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ gleich

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}') = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}) = \Sigma\lambda_k\mu_l(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l).$$

Es gilt der Satz: Sind $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ zu einander äquivalent und ebenso $\mathfrak{Q}_1', \mathfrak{Q}_2'$, so ist

$$(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_1') = (\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_2').$$

Diese Definition der Zahl der Schnittpunkte stimmt mit der Anschauung überein, soweit aus der Anschauung allein diese Zahl sich ergibt. Es wird z. B. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, d. i. die Zahl der Schnittpunkte irgend zweier ebenen Schnitte gleich der Ordnung n von F, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}')$, d. i. die Zahl der zwei Berührungskegeln von F gemeinsamen Ebenen, gleich der Klasse n' von F, und es wird $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$ gleich der Klasse a eines ebenen Schnittes oder gleich der Ordnung $a' = a$ eines Berührungskegels. Ist allgemeiner $\mathfrak{P}$ irgend eine Kurve auf F und $\mathfrak{P}'$ die F längs $\mathfrak{P}$ umschriebene abwickelbare Fläche, so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ die Ordnung von $\mathfrak{P}$ und $(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$ die Klasse von $\mathfrak{P}'$.

Wir nehmen hier in dieser Übersicht im folgenden der einfacheren Darstellung wegen an, daß keine ausgezeichneten Stellen und also keine ausgezeichneten Kurven vorhanden sind. Es ist also immer ein Primteiler erster Art *P gleich* der ihm entsprechenden Kurve $\mathfrak{P}$.

§ 6. Die kanonische Klasse.

1. Es sei $\mathfrak{P}$ eine Primkurve und $P(u, v)$ die zugeordnete Funktion des $\mathfrak{P}$ zugeordneten Primteilers für eine Stelle S. Im Körper $\mathfrak{P}$ läßt sich $du^{-1}\,\partial P/\partial u$ darstellen in der Form

$$du^{-1}\frac{\partial P(u,v)}{\partial v} = d\omega^{-1}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}, \tag{15}$$

wo $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ ein ganzer Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$ ist und $d\omega$ ein symbolisches Differential, das nirgends Null oder unendlich wird. Der Divisor $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ heißt der Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$. Seine Ordnung, die immer gerade ist, sei mit $2\sigma_{\mathfrak{P}}$ bezeichnet.

2. Die Kurvenklasse, der die Kurve $\mathfrak{A}^{n-4}\mathfrak{D}^{-1}$ oder die nach (12) in § 3 zu ihr äquivalente Kurve $\mathfrak{R}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}^{-3}$ angehört, heißt kanonische Klasse von F. Sie sei mit $(\mathfrak{K})$ bezeichnet. Es gilt der Satz:

Die Kurven der Klasse $(\mathfrak{P}\mathfrak{K})$ gehen für $\mathfrak{P} = 0$ über in Divisoren der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}})$ des Körpers $\mathfrak{P}$, wenn $(\mathfrak{k})$ die kanonische Klasse von $\mathfrak{P}$ bedeutet. Da die Ordnung der kanonischen Klasse $(\mathfrak{k})$ gleich $2\pi_{\mathfrak{P}} - 2$ ist, wenn wir mit $\pi_{\mathfrak{P}}$ das Geschlecht von $\mathfrak{P}$ bezeichnen, so folgt

$$2\pi_{\mathfrak{P}} - 2 + 2\sigma_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}). \tag{16}$$

Für einen allgemein liegenden ebenen Schnitt $\mathfrak{A}$ ist z. B. $\mathfrak{d}_{\mathfrak{B}} = 1$, $\sigma_{\mathfrak{B}} = 0$, und daher gilt für sein Geschlecht p die Gleichung

$$2p-2 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{n-4}\mathfrak{D}^{-1}) = n(n-3) - (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = n(n-3) - 2b,$$

wenn wir die Ordnung der mehrfachen Kurve mit b bezeichnen.

Kapitel II. Differentialinvarianten.

§ 1. Differentialformen.

Geben wir den Größen u, v innerhalb des Konvergenzgebietes der vorkommenden Reihen feste Werte, so stellen

$$y_\alpha = A_\alpha(u,v) + \xi \frac{\partial A_\alpha}{\partial u}(u,v) + \eta \frac{\partial A_\alpha}{\partial v}(u,v) \qquad (\alpha = 1,2,3,4)$$

bei beliebigem $\xi\eta$ die homogenen Koordinaten eines Punktes in der Berührungsebene von F an der Stelle (u,v) dar. Wir fassen $\xi\eta$ als Punktkoordinaten innerhalb der Berührungsebene auf. Jedem Werte μ des Verhältnisses $\eta:\xi$ entspricht eine Tangente von F an der Stelle (u,v), nämlich die mit der Gleichung $\eta = \mu\xi$; wir nennen sie die Tangente $(\xi\eta)$.

Bei festgehaltenem u, v sind

$$y'_\alpha = A'_\alpha(u,v) + \xi' \frac{\partial A'_\alpha}{\partial u}(u,v) + \eta' \frac{\partial A'_\alpha}{\partial u}(u,v) \qquad (\alpha = 1,2,3,4$$

die Ebenenkoordinaten einer durch die Stelle (u,v) von F gehenden Ebene. Der Schnitt dieser Ebene mit der Berührungsebene von F in (u,v) ist eine Tangente von F, die wir kurz mit $(\xi'\eta')$ bezeichnen.

Die Differentialformen, die genauer betrachtet werden, sind folgende:

1. Die Form

$$Q_2(\xi,\eta) \equiv L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2.$$

Es ist $Q_2(\xi,\eta) = 0$ die Bedingung dafür, daß $(\xi\eta)$ Inflexionstangente ist.

2. Die Formen

$$Q_1(\xi,\eta) = X\xi + Y\eta, \quad Q'_1(\xi,\eta) = X'\xi + Y'\eta.$$

Es ist $Q_1(\xi,\eta) = 0$ die Bedingung dafür, daß die Tangente $(\xi\eta)$ durch eine gegebene Gerade g geht, und $Q'_1(\xi',\eta') = 0$ gibt dieselbe Bedingung für die Tangente $(\xi'\eta')$. Sind (p_{ik}) die *Plücker*schen Linienkoordinaten von g, so ist

$$X = \Sigma p_{kl}\left\{A_k \frac{\partial A_l}{\partial u} - A_l \frac{\partial A_k}{\partial u}\right\}, \quad Y = \Sigma p_{kl}\left\{A_k \frac{\partial A_l}{\partial v} - A_l \frac{\partial A_k}{\partial v}\right\}.$$

3. Die Form

$$Q_3(\xi,\eta) \equiv A\xi^3 + 3B\xi^2\eta + 3C\xi\eta^2 + D\eta^3.$$

Es ist $Q_3(\xi,\eta) = 0$ in Verbindung mit $Q_2(\xi,\eta) = 0$ die Bedingung dafür, daß die Tangente $(\xi\eta)$ mit F im Berührungspunkte mindestens vier zusammenfallende Punkte gemeinsam hat.

4. Die Tangenten von *Clebsch* und die Form $Q_4(\xi,\eta)$.

Die dritte Polarfläche von F inbezug auf die Stelle (u,v) ist eine Fläche dritter Ordnung, die F in (u,v) berührt. Sie wird daher von der Tangentialebene von F in (u,v) in einer Kurve k dritter Ordnung geschnitten, die in (u,v) einen Doppelpunkt hat. Es hat also k drei (in einer Geraden liegende) Wendepunkte. Die drei Tangenten von F an der Stelle (u,v), die durch die Wendepunkte gehen, sollen die *Clebsch*schen Tangenten von F an der Stelle (u,v) heißen. Die Gleichung $Q_4(\xi,\eta) = 0$, die in ξ,η homogen vom dritten Grade ist, liefert die drei *Clebsch*schen Tangenten. Es ist

$$Q_4(\xi,\eta) \equiv 4RR'\,Q_3(\xi,\eta) - 3\left\{\left(R\frac{\partial R'}{\partial u} - R'\frac{\partial R}{\partial u}\right)\xi + \left(R\frac{\partial R'}{\partial v} - R'\frac{\partial R}{\partial v}\right)\eta\right\}Q_2(\xi,\eta).$$

Die Formen Q_2, Q_3, Q_4 entsprechen dual sich selbst.

§ 2. Der Äquivalenzsatz für die Invarianten der Formen Q_a.

Die im vorigen Paragraphen definierten Formen Q_a lassen sich für jede Stelle von F bilden, wenn sie auch an singulären Stellen ihre einfache geometrische Bedeutung verlieren. Die Invarianten sind für jede Stelle gleichgebildet. Bilden wir eine für zwei Stellen von F, so muß die eine aus der andern durch analytische Fortsetzung hervorgehen. Es hat daher jede Invariante eine Bedeutung für die ganze Fläche. Das findet seinen Ausdruck in folgendem Satze, der seinem Inhalte nach nicht neu ist, wenn ich ihn auch in dieser Form nirgends ausgesprochen gefunden habe.

Es sei $\mathfrak{J}$ die Kurve von F, längs der eine Differentialinvariante Null wird. Dann lassen sich immer solche Potenzen von der mehrfachen Kurve $\mathfrak{D}$ und der Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$ angeben, daß sie zusammen mit $\mathfrak{J}$ den vollen Schnitt einer Fläche von angebbarer Ordnung mit F bilden.

Zu diesem Satze gibt es noch einen dual entsprechenden. Da eine Fläche m-ter Ordnung F in einer Kurve schneidet, die äquivalent zu $\mathfrak{A}^m$ ist, so ergeben sich aus diesem Satze die in § 4 angegebenen Äquivalenzen.

§ 3. Die Invarianten.

1. Die Resultante von $Q_1(\xi,\eta)$ und $Q_1'(\xi,\eta)$, nämlich

$$I = XY' - YX'.$$

Sie wird Null an den Stellen von F, deren eine Inflexionstangente durch die gegebene Gerade g geht.

2. Die Diskriminante von Q_2. Für sie gilt die Gleichung

$$LN - M^2 = RR'.$$

3. Die Resultante von Q_1 und Q_2 und die von Q_1' und Q_2. Diese liefern nichts Neues. Es ist nämlich

$$LY^2 - 2MYX + NX^2 = RI, \quad LY'^2 - 2MY'X' + NX'^2 = R'I.$$

4. Die Resultante von Q_2 und Q_3 bezeichnen wir mit S. Sie wird Null an den Stellen, wo F eine mindestens vierpunktige Tangente hat.

5. Die Resultante von Q_2 und Q_4 ist

$$4RR'S.$$

6. Die Diskriminante von Q_4 ist

$$4RR'S^2.$$

7. Die Resultanten von Q_1 und Q_4 und von Q_1' und Q_4 sind

$$U = Q_4(Y,-X), \quad U' = Q_4(Y',-X').$$

Es wird $U = 0$ für die Stellen von F, deren eine *Clebsch*sche Tangente durch die gegebene Gerade g geht. U' ist dual entsprechend zu U.

§ 4. Die Äquivalenzen.

Der Äquivalenzsatz ergibt die folgenden Äquivalenzen. Wir fügen die in I gefundenen hinzu. Sie sind gleich für die Kurven statt für die Divisoren geschrieben, also in deutschen Buchstaben.

I.	$\mathfrak{R}^3\ \mathfrak{D}_0\ \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1}$,	I'.	$\mathfrak{R}'^3\ \mathfrak{D}'_0\ \mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'^{n'-1}$,
II.	$\mathfrak{R}^{11}\,\mathfrak{R}'\ \mathfrak{D}_0^4 \sim \mathfrak{A}^{4n-8}$,	II'.	$\mathfrak{R}'^{11}\,\mathfrak{R}\ \mathfrak{D}_0'^4 \sim \mathfrak{A}'^{4n'-8}$,
III.	$\mathfrak{R}^8\ \mathfrak{D}_0^3\ \mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^{3n-4}$,	III'.	$\mathfrak{R}'^8\ \mathfrak{D}_0'^3\ \mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}'^{3n'-4}$,
IV.	$\mathfrak{R}^{27}\,\mathfrak{D}_0^{11}\,\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}^{11n-24}$,	IV'.	$\mathfrak{R}'^{27}\,\mathfrak{D}_0'^{11}\,\mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}'^{11n'-24}$,
V.	$\mathfrak{R}^{19}\,\mathfrak{D}_0^8\ \mathfrak{U} \sim \mathfrak{A}^{8n-14}$,	V'.	$\mathfrak{R}'^{19}\,\mathfrak{D}_0'^8\ \mathfrak{U}' \sim \mathfrak{A}'^{8n'-14}$,
VI.	$\mathfrak{R}^{37}\,\mathfrak{D}_0^{14}\,\mathfrak{U}' \sim \mathfrak{A}^{14n-26}$,	VI'.	$\mathfrak{R}'^{37}\,\mathfrak{D}_0'^{14}\,\mathfrak{U} \sim \mathfrak{A}'^{14n'-26}$.

Von diesen Äquivalenzen sind 7 unabhängig, z. B. I, I', II, III, IV, V, V'.

§ 5. Einige Gleichungen.

1. Für die *Hesse*sche Determinante von F gilt die Zerlegung

$$\left|\frac{\partial^2 F(A)}{\partial A_k \partial A_l}\right| \equiv (n-1)^2 D_0^4 R^{11} R'.$$

2. Es ist U durch R und U' durch R' teilbar. Wir setzen

$$U = RU_0, \quad U' = R'U'_0.$$

Es bestehen die Identitäten

$$R'(X\,du + Y\,dv)^2 - R(X'\,du + Y'\,dv)^2 \equiv IQ_2(du, dv),$$
$$R'U_0^2 - RU_0'^2 \equiv SI^3.$$

Kapitel III. Kurven auf F, im besonderen ebene Schnitte.

§ 1. Raumkurven*).

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ ganze linear unabhängige Divisoren derselben Klasse eines algebraischen Körpers einer unabhängigen Veränderlichen. Wir setzen, unter den λ_α Konstanten verstehend,

$$\mathfrak{a}_0 = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3 + \lambda_4 \mathfrak{a}_4$$

und

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}, \quad \xi_2 = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_0}, \quad \xi_3 = \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{a}_0}, \quad \xi_4 = \frac{\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_0}.$$

Deuten wir die ξ_α als homogene Punktkoordinaten im Raume, so stellen diese Gleichungen eine algebraische Raumkurve k dar. Es sei P eine Stelle der Raumkurve und $\mathfrak{p}$ der zu ihr gehörige Primteiler. Schneidet eine beliebige durch P gehende Ebene k in α in P zusammenfallenden

*) Vergl. in diesem und dem folgenden Paragraphen *Hensel-Landsberg* und *Hensel* a. a. O.

Punkten, so wird $\mathfrak{p}$ in den Divisor $\mathfrak{d}_1$ der Rückkehrpunkte in der Potenz $\alpha - 1$ aufgenommen. Schneidet eine Ebene, die k in P in mehr als α zusammenfallenden Punkten trifft, k mindestens in $\alpha + \beta$ in P zusammenfallenden Punkten, so wird $\mathfrak{p}$ in den Divisor $\mathfrak{d}_2$ der stationären Tangenten in der Potenz $\beta - 1$ aufgenommen. Schneidet schließlich die Ebene, die k in P in mehr als $\alpha + \beta$ Punkten trifft, k in P in $\alpha + \beta + \gamma$ zusammenfallenden Punkten, so wird $\mathfrak{p}$ in den Divisor $\mathfrak{d}_3$ der stationären Schmiegungsebenen in der Potenz $\gamma - 1$ aufgenommen. Die Ordnung von $\mathfrak{d}_\alpha$ sei w_α.

Es bestehen folgende Zerlegungen, in denen $d\omega$ ein symbolisches Differential bedeutet, das nirgends Null oder unendlich wird.

$$(1) \qquad \xi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha d\xi_\beta - \xi_\beta d\xi_\alpha = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_0^2}\, \mathfrak{a}_{\alpha\beta}\, d\omega,$$

$$(2) \qquad \eta_\delta = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & d\xi_\alpha & d^2\xi_\alpha \\ \xi_\beta & d\xi_\beta & d^2\xi_\beta \\ \xi_\gamma & d\xi_\gamma & d^2\xi_\gamma \end{vmatrix} = \frac{\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2}{\mathfrak{a}_0^3}\, \mathfrak{a}'_\delta d\omega^3, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3, 4)$$

$$(3) \qquad \eta = |\xi_\alpha, d\xi_\alpha, d^2\xi_\alpha, d^3\xi_\alpha| = \frac{\mathfrak{d}_1^3 \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}_3}{\mathfrak{a}_0^4}\, d\omega^6.$$

Die 6 Divisoren $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ sind ganz und zu einander teilerfremd, ebenso die vier Divisoren $\mathfrak{a}'_\alpha$. Die Ordnung der $\mathfrak{a}_\alpha$ sei n_1, die der $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}$ sei n_2 und die der $\mathfrak{a}'_\alpha$ sei n_3. Es ist n_1 die Ordnung, n_2 der Rang und n_3 die Klasse von k. Setzt man in den letzten drei Gleichungen die Ordnungen links und rechts gleich und beachtet, daß die Ordnung eines Differentials λ-ter Ordnung gleich $\lambda(2p-2)$ ist, so erhält man die *Plücker*schen Gleichungen.

§ 2. Ebene Kurven.

Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ drei linear unabhängige ganze Divisoren derselben Klasse eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Konstanten. Wir setzen

$$\mathfrak{a}_0 = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 + \lambda_3 \mathfrak{a}_3,$$

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}, \quad \xi_2 = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_0}, \quad \xi_3 = \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{a}_0}.$$

Sind die ξ_α homogene Punktkoordinaten einer Ebene, so definieren diese Gleichungen eine algebraische ebene Kurve. Es seien $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ die Divisoren der stationären Punkte und Tangenten. Ihre Ordnungen seien w_1, w_2. Es bestehen folgende Gleichungen

$$(4) \qquad \xi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha d\xi_\beta - \xi_\beta d\xi_\alpha = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}_0^2}\, \mathfrak{a}'_\gamma d\omega,$$

$$(5) \qquad \eta = |\xi, d\xi_\alpha, d^2\xi_\alpha| = \frac{\mathfrak{d}_1^2 \mathfrak{d}_2}{\mathfrak{a}_0^3}\, d\omega^3.$$

Die Divisoren $\mathfrak{a}'_\alpha$ sind ganz und ohne gemeinsamen Teiler. Die Ordnungen von $\mathfrak{a}_\alpha$, $\mathfrak{a}'_\alpha$ seien n_1, n_2. Es ist n_1 die Ordnung und n_2 die Klasse von k.

§ 3. Kurven auf F.

Die Formeln des § 1 sind auf eine Form zu bringen, die ihre Anwendung auf Kurven auf F bequem gestattet. Wir bezeichnen mit y_α die Koordinaten eines Punktes (y) im Raume, mit x_α die eines Punktes (x) auf F und mit ξ_α die eines Punktes (ξ) einer auf F liegenden Kurve.

Es sei $\mathfrak{P}$ eine auf F liegende algebraische Primkurve, $P(u, v) \equiv P$ sei ihre zugeordnete Funktion für die gerade betrachtete Stelle S. Ferner sei $G(y) = 0$ die Gleichung einer Fläche g-ter Ordnung, die durch $\mathfrak{P}$ hindurchgeht. Es sei $G(y)$ unzerlegbar und von $F(y)$ verschieden. Es wird $G(x)$ längs $\mathfrak{P}$ Null, so daß $G(x)$ durch P teilbar ist. Es sei

$$(6) \qquad G(x) = P^a(u, v)\, Q(u, v) = P^a Q,$$

wo Q nicht mehr durch P teilbar sein soll. Bei passender Wahl von A_0 des Nenners der x_α ist Q eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v. Wir setzen

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_\alpha} = G_\alpha(x).$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) des § 1 ergeben sich folgende Gleichungen

$$(\mathrm{I}) \quad \xi_{\alpha\beta} = \lim_{P=0} \left\{ \frac{PR}{aA_0^3 G(x)} \cdot \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}} \left[A'_\gamma G_\delta(x) - A'_\delta G_\gamma(x) \right] \right\},$$

$$(\mathrm{II}) \quad \eta_\alpha = \lim_{P=0} \left\{ \frac{PR}{aA_0^4 G(x)} \cdot \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}} \left[A'_\alpha \sum_k G_k(x)\, d^2 A_k - G_\alpha(x)\, Q_2(du, dv) \right] \right\},$$

$$(\mathrm{III}) \quad \eta = \lim_{P=0} \left\{ \frac{PR}{aA_0^5 G(x)} \cdot \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}} \left[\left\{ \frac{3}{2} d\, Q_2(du, dv) - \frac{1}{2} Q_3(du, dv) \right\} \sum_k G_k(x) d^2 A_k \right.\right.$$
$$\left.\left. - Q_2(du, dv) \sum_k G_k(x) d^3 A_k \right] \right\}.$$

Um eine Vorstellung von der Verwendung der Formeln zu geben, die den Inhalt des dritten Kapitels meines Buches ausmacht, gebe ich ein paar Beispiele.

§ 4. Die Rückkehrkurve.

Es sei $\mathfrak{P}$ keine kondensierte Kurve, sodaß die Größen $\xi_{\alpha\beta}$ nicht alle Null sein können. Ferner sei $G(x)$ eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Fläche, die F nicht längs $\mathfrak{P}$ überall berührt, sodaß für $P=0$ nicht alle Ausdrücke

$$A'_\alpha G_\beta(x) - A'_\beta G_\alpha(x)$$

gleich Null werden. Es sei schließlich $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}=R$ in der Potenz ρ enthalten, es sei, wie wir sagen wollen, die Rückkehrordnung von $\mathfrak{P}$ gleich ρ. Dann folgt aus (I) und (6), daß

$$a = \rho + 1,$$

oder in Worten:

Ist $\mathfrak{P}$ eine nicht kondensierte Kurve von der Rückkehrordnung ρ, so hat eine beliebige, durch $\mathfrak{P}$ gehende Fläche $(\rho+1)$ mal die Kurve $\mathfrak{P}$ mit F gemeinsam.

§ 5. Der Divisor der Rückkehrpunkte eines ebenen Schnittes.

Die Ebene des zu betrachtenden ebenen Schnittes sei $y_4=0$, der ebene Schnitt also $A_4=\mathfrak{A}_4$. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $\mathfrak{A}_4$ außer einer nicht kondensierten Primkurve $\mathfrak{P}$ nur noch kondensierte Kurven enthält; wir setzen

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{V}\,\mathfrak{P},$$

wo in $\mathfrak{V}$ die kondensierten Kurven vereinigt sein sollen. Es ist $\mathfrak{P}$ eine Kurve n-ter Ordnung, der eigentliche ebene Schnitt der Ebene $y_4=0$ mit F. Wir nennen $\mathfrak{A}_4=\mathfrak{V}\mathfrak{P}$ zum Unterschiede den *vollen ebenen Schnitt*.

Wie wir in Kap. I gesehen haben, geht jede Kurve von F für $\mathfrak{P}=0$ über in einen Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen diesen Divisor mit dem entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben. So geht zum Beispiel $\mathfrak{A}_\alpha(\alpha=0,1,2,3)$ in $\mathfrak{a}_\alpha$ über, und es ist, wie in § 2,

$$\xi_\alpha = \frac{\mathfrak{a}_\alpha}{\mathfrak{a}_0},\ (\alpha=1,2,3).$$

Eine Ausnahme in der Bezeichnung machen wir bei den Kurven $\mathfrak{A}'_\alpha$. Die

Divisoren, die für $\mathfrak{P}=0$ aus $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ hervorgehen, können einen gemeinsamen Teiler haben. Ihren größten gemeinsamen Teiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ und setzen

$$|\mathfrak{A}_a'|_{\mathfrak{P}=0} = \mathfrak{d}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{a}_a^{(1)}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Da

$$\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{A}_0'} y_2 + \frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{A}_0'} y_2 + \frac{\mathfrak{A}_3'}{\mathfrak{A}_0'} y_3 + \frac{\mathfrak{A}_4'}{\mathfrak{A}_0'} y_4 = 0$$

die Gleichung der Berührungsebene von F ist, und da die und nur die Stellen von $\mathfrak{P}$ einen Beitrag zu $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ liefern, wo gleichzeitig $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ zu Null werden, so folgt, daß zu $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ einen Beitrag liefern die und nur die Stellen von $\mathfrak{P}$, wo die Ebene von $\mathfrak{P}$, d. i. $y_4=0$, Tangentialebene von F ist. Wir nennen daher $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ den *Berührungsdivisor von* $\mathfrak{P}$.

Nach (4) § 2 ist

$$\xi_{\beta\gamma} = \frac{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_a'}{\mathfrak{a}_0^2}\, d\omega, \tag{7}$$

wenn $\mathfrak{d}_1$ der Divisor der Rückkehrpunkte von $\mathfrak{P}$ ist. Wir wählen in (I)

$$G(x) = x_4 = \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_0^{-1} = \mathfrak{B}\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{A}_0^{-1}.$$

Da nach § 6, Kap. I

$$\left\{\frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}}\right\}_{\mathfrak{P}=0} = \frac{d\omega}{\mathfrak{d}_\mathfrak{P}},$$

wo $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ der Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ ist, $\mathfrak{P}$ betrachtet als Kurve auf F, so folgt aus (I), wenn wir bedenken, daß wir die großen lateinischen Buchstaben bei den in diesem Auszuge gemachten vereinfachenden Annahmen durch die deutschen ersetzen dürfen,

$$\xi_{\beta\gamma} = \lim_{\mathfrak{P}=0} \left\{ \frac{\mathfrak{P}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{A}_\alpha'}{\mathfrak{A}_0^3\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{P}\, \mathfrak{A}_0^{-1}} \cdot \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}} \right\} = \frac{r\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{a}_\alpha^{(1)}}{v\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{a}_0^2}\, d\omega$$

und durch Vergleich mit (7)

$$\frac{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_a'}{\mathfrak{a}_0^2} = \frac{r\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{a}_a^{(1)}}{v\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}\, \mathfrak{a}_0^2}.$$

Da sowohl die $\mathfrak{a}_a'$ wie auch die $\mathfrak{a}_a^{(1)}$ ganz und ohne gemeinsamen Teiler sind, so folgt weiter $\mathfrak{a}_a' = \mathfrak{a}_a^{(1)}$ und

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{r\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}}{v\, \mathfrak{d}_\mathfrak{P}}.$$

Diese Formel gibt vollkommen darüber Aufschluß, wie und aus welchen Punkten die Rückkehrpunkte eines ebenen Schnittes entstehen. Sie zeigt deutlich, welche einfache und übersichtliche Darstellung die von Herrn *Hensel* eingeführten Primteiler gestatten. Geht im besonderen $\mathfrak{P}$ durch keinen isolierten Punkt von F, so ist $\mathfrak{B}=1$ und damit auch $\mathfrak{v}=1$; berührt ferner die Ebene $y_4=0$ die Fläche F nirgends, so ist $\mathfrak{b}_{\mathfrak{B}}=1$; schließlich gehe $y_4=0$ durch keinen besonderen Punkt der Rückkehrkurve, so daß auch $\delta_{\mathfrak{B}}=1$. Es ist dann

$$\mathfrak{d}_1=\mathfrak{r}=|\mathfrak{R}|_{\mathfrak{B}-0},$$

eine Gleichung, die also für eine ganz allgemein liegende Ebene gilt und die geometrisch die Gestalt von F in der Nähe eines regulären Punktes der Rückkehrkurve veranschaulicht.

Kap. IV. Über die *Salmon*sche Kurve einer Fläche.

Nachdem ich, wie ich hoffe, im vorigen einen ungefähren Begriff von der Art der angewandten Methoden gegeben habe, beschränke ich mich im folgenden im wesentlichen darauf, eine kurze Übersicht zu geben.

§ 1. Inflexionskurven.

Es sei $\mathfrak{H}$ eine algebraische Primkurve auf F. Sie sei in der Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$ in der ϱ-ten und in der parabolischen Kurve $\mathfrak{R}'$ in der ϱ'-ten Potenz enthalten. Zur weiteren Charakterisierung von $\mathfrak{H}$ kann man das Verhalten der Inflexionskurven von F in der Umgebung einer regulären Stelle von $\mathfrak{H}$ untersuchen. Es kann eintreten, daß die Koeffizienten L, M, N der Differentialgleichung $Q_2(du, dv)=0$ der Inflexionskurven die Kurve $\mathfrak{H}$ enthalten. Wir bezeichnen die Kurve, die den größten gemeinsamen Faktor dieser Koeffizienten darstellt, mit $\mathfrak{S}_1$. Es sei $\mathfrak{H}$ in dieser Kurve in der σ_1-ten Potenz enthalten.

Wenn $\varrho+\varrho'$ gerade, so gehen durch eine reguläre Stelle S_0 von $\mathfrak{H}$ zwei Inflexionskurven $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, wenn $\varrho+\varrho'$ ungerade, so geht durch S_0 nur eine Inflexionskurve $\mathfrak{J}$. Die Ordnungen des Stationärseins von Punkt, Tangente und Schmiegungsebene von $\mathfrak{J}_k$; $\mathfrak{J}$ in S_0 seien bezeichnet mit

$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$; α, β, γ. Diese Zahlen lassen sich in vielen Fällen durch die Zahlen $\varrho, \varrho', \sigma_1$ in einfacher Weise ausdrücken. Es ist

$$\alpha_k - \gamma_k = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho'), \quad \alpha - \gamma = \varrho - \varrho'$$

und z. B. im Falle: $\varrho + \varrho'$ ungerade, $\varrho' > \varrho \geqq \sigma_1 > \frac{\varrho + 1}{2}$

$$\alpha = 2\varrho - 2\sigma_1 + 1, \quad \beta = \varrho + \varrho' - 2\sigma_1 + 1, \quad \gamma = \varrho + \varrho' - 2\sigma_1 + 1.$$

§ 2. Die *Salmon*sche Kurve.

Eine Inflexionstangente hat i. a. eine dreipunktige Berührung mit F. Es gibt aber unendlich viele Inflexionstangenten auf F, die eine vier- (oder mehr-)punktige Berührung mit F haben. Die Berührungspunkte dieser Tangenten bilden die Kurve $\mathfrak{S}$, längs der die Invariante S Null wird. Sie enthält die eben erwähnte Kurve $\mathfrak{S}_1$ immer in der dritten Potenz. Wir setzen $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1^3 \mathfrak{S}_2$ und nennen $\mathfrak{S}_2$ die *Salmon*sche Kurve von F, weil *Salmon* zuerst auf diese Kurve hingewiesen hat*). Die Kurven $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$ sind zu sich selbst dual.

Es sei $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{S}_2$ in der Potenz σ_2 enthalten. Es fragt sich, wie man diese Zahl anderweitig deuten kann; wie man z. B. die Zahl ϱ, die angibt, wie oft $\mathfrak{H}$ in der Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$ enthalten ist, dadurch veranschaulichen kann, daß jede durch $\mathfrak{H}$ gehende Fläche die Kurve $\mathfrak{H}$ mindestens $(\varrho + 1)$-mal mit F gemeinsam hat. Solche einfache Deutung gibt es hier nicht. Es besteht aber der Satz, daß

$$\sigma_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2, \quad \text{wenn } \varrho + \varrho' \text{ gerade;}$$
$$\sigma_2 = \alpha + \beta + \gamma - 3, \quad \text{wenn } \varrho + \varrho' \text{ ungerade.}$$

§ 3. Flächen aus Inflexionstangenten.

Es seien t_1, t_2 die in einem Punkte von $\mathfrak{H}$ berührenden Inflexionstangenten von F oder es sei t_0 die Inflexionstangente, wenn sie zusammenfallen. Die Zahl der zusammenfallenden Schnittpunkte, die t_k im Berührungspunkte mit F hat, sei τ_0, wobei angenommen ist, daß der Berührungspunkt ein regulärer Punkt von $\mathfrak{H}$ ist. Die Tangenten t_k bilden eine durch $\mathfrak{H}$ gehende geradlinige Fläche H_k. Die Kurve $\mathfrak{H}$ zähle unter dem Schnitt

*) *Salmon*, Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. 4 (1849), S. 260. Vergl. auch *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. Raumes, Bd. 2, dritte Auflage, S. 623.

von F mit H_k h_k-mal. Es ist dann $h_k = \tau_k$. Man könnte vermuten, daß die Zahlen h und τ in einer einfachen Beziehung zu σ_2 stehen. Das ist aber nur der Fall, wenn $\varrho = \varrho' = 0$. Dann ist

$$\sigma_2 = h_1 + h_2 - 6.$$

Im Falle $\varrho > \varrho'$ ist z. B.

$$h_0 = 2\varrho + 2, \quad \text{wenn } \sigma_1 = 0,$$
$$= 3\varrho + 3, \quad \text{wenn } \sigma_1 > 0.$$

Die vorstehenden Betrachtungen gelten nur, wenn $\mathfrak{H}$ weder eine Gerade, noch eine ebene Berührungskurve, noch kondensiert ist. Die letzten Angaben haben zur Voraussetzung, daß $\mathfrak{H}$ eine wirkliche Raumkurve ist.

Kap. V. Über die Inflexionstangentenkurven.

§ 1. Isolierte Wendestellen und Wendekurven. Geometrische Definition.

Es sei S_0 eine *Stelle* von F, und E sei die Berührungsebene von F in S_0. Jede durch S_0 gehende in E liegende Gerade soll Tangente von F in S_0 heißen. Eine allgemein liegende Tangente von F in S_0 habe in S_0 mit F λ zusammenfallende Punkte gemeinsam. Im allgemeinen ist $\lambda = 2$. Wenn $\lambda > 2$, so nennen wir die Stelle S_0, wenn sie isoliert liegt, eine isolierte Wendestelle von F. Es ist S_0 in einfachen Fällen ein sogenannter Flachpunkt. Bilden die Stellen S_0, wo $\lambda > 2$, eine Kurve, so nennen wir diese eine Wendekurve und $\lambda - 2$ ihre Wendeordnung. Wir bilden dann eine zusammengesetzte Kurve, die wir Wendekurve von F nennen, indem wir jede Wendekurve so oft in sie aufnehmen, wie ihre Wendeordnung angibt.

Alle diese Kurven sind gleichzeitig Rückkehrkurven und parabolische Kurven. Es gilt aber nicht das Umgekehrte. Die Wendeordnung φ einer Kurve $\mathfrak{H}$ hat dann noch folgende Bedeutung: Ein beliebiger ebener Schnitt durch eine reguläre Stelle S_0 von $\mathfrak{H}$ hat in S_0 eine Wendetangente der Wendeordnung φ. Da die Wendekurve sich dual selbst entspricht, so gilt auch dual zu dem vorigen: Ein beliebiger Berührungskegel von F, der F

in einer regulären Stelle S_0 von $\mathfrak{H}$ berührt, hat eine durch S_0 gehende stationäre Kante, und die Ordnung ihres Stationärseins ist φ. Dies alles gilt nur für solche Kurven $\mathfrak{H}$, die weder kondensiert noch ebene Berührungskurven noch Geraden sind. Ob und wie oft diese besonderen Kurven in die Wendekurve $\mathfrak{W}$ von F aufzunehmen sind, ergibt sich aus der analytischen Definition von $\mathfrak{W}$.

§ 2. Die Wendekurve von F und die isolierten Wendestellen. Analytische Definition.

Es sei g eine Gerade; sie sei gegeben durch ihre *Plücker*schen Linienkoordinaten p_{kl}. Die Berührungspunkte derjenigen Inflexionstangenten von F, die durch g gehen, bilden eine Kurve $\mathfrak{J}$, die wir eine Inflexionstangentenkurve von F oder kürzer eine I-Kurve nennen wollen. Solcher Kurven gibt es unendlich viele, da sie von der Wahl von g abhängen. Sie lassen sich linear durch eine endliche Zahl von ihnen zusammensetzen, mit Koeffizienten, die quadratische Funktionen der Koordinaten p_{kl} von g sind. Wir haben also eine Gleichung der Form

$$\mathfrak{J} = J(p_{kl}),$$

und zwar ist $J(p_{kl})$ im wesentlichen die oben mit I bezeichnete Invariante. Es kann eintreten, daß $\mathfrak{J}$ einen von den p_{kl} unabhängigen Faktor hat. Diesen bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}$ und nennen ihn die Wendekurve von F. Das ist die analytische Definition von $\mathfrak{W}$. Wir setzen $\mathfrak{J} = \mathfrak{W}\mathfrak{J}_0$. Die Kurven $\mathfrak{J}_0$ können gemeinsame von den p_{kl} unabhängige Schnittpunkte haben. Diese Stellen nennen wir isolierte Wendestellen von F.

Ist S eine auf $\mathfrak{W}$ liegende Stelle von F oder eine der isolierten Wendestellen, so wollen wir jede Tangente von F an der Stelle S eine *uneigentliche Inflexionstangente* nennen.

Die Funktion $J(p_{kl})$ ist, wie schon erwähnt, im wesentlichen die in Kap. II eingeführte Differentialinvariante I. Wie aus § 5, Kap. II folgt, zerfällt sie in zwei in den p_{kl} lineare Faktoren. Diese Gleichung erweist sich als überaus fruchtbar. Von den Ergebnissen, die sie liefert, seien einige angegeben.

§ 3. Der Divisor der Wendetangenten eines ebenen Schnittes.

Wir verwenden die Bezeichnungen des § 5, Kap. III und machen über den ebenen Schnitt $\mathfrak{A} = \mathfrak{V}\mathfrak{P}$ dieselben Voraussetzungen wie dort. Wir

wählen die Gerade g mit den Koordinaten p_{kl} in der Ebene von $\mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{A}^{(1)}$ ein von $\mathfrak{A}$ verschiedener ebener Schnitt von F, der durch g geht. Es seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{a}^{(1)}$ die Divisoren des Körpers $\mathfrak{P}$, in die $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$ für $\mathfrak{P}=0$ übergehen. Dann ist der Divisor $\mathfrak{d}_2$ der Wendetangenten von $\mathfrak{P}$ gleich

$$\mathfrak{d}_2 = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{a}^{(1)2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}^2\mathfrak{v}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}}. \tag{1}$$

Der Divisor $\mathfrak{a}^{(1)}$ hängt von der Lage der Geraden g, also von deren Koordinaten p_{kl} ab. Da $\mathfrak{d}_2$ seiner Bedeutung nach davon unabhängig ist, so ist $\mathfrak{i}$ durch $\mathfrak{a}^{(1)2}$ teilbar. Das ist geometrisch einleuchtend. Denn zu $\mathfrak{a}^{(1)}$ liefern die Schnittpunkte der beiden ebenen Schnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$ einen Beitrag, also die Schnittpunkte von g mit F. Durch diese Punkte geht aber $\mathfrak{J}$ zweimal, da die beiden Inflexionstangenten von F in diesen Punkten natürlich beide g schneiden.

Wegen der Bedeutung von $\mathfrak{J}$ folgt aus (1), daß die Wendetangenten eines ebenen Schnittes immer eigentliche oder uneigentliche Inflexionstangenten von F sind. Wegen des Nenners $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}^2\mathfrak{v}\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$ gilt aber nicht das Umgekehrte. Hat die Ebene von $\mathfrak{A}$ eine allgemeine Lage, sodaß $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{b}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{v}=\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}=1$, so ist einfacher

$$\mathfrak{d}_2 = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{a}^{(1)2}}.$$

Es sind dann auch alle in der Ebene von $\mathfrak{A}$ liegenden Inflexionstangenten von F Wendetangenten von $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}$. Für die Ordnung k' von $\mathfrak{d}_2$ ergibt sich aus (1)

$$k' = (\mathfrak{A},\mathfrak{J}) - 2(\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{(1)}) = (\mathfrak{A},\mathfrak{J}) - 2n. \tag{2}$$

Dual entsprechend hierzu findet man als die Ordnung k des Divisors der Rückkehrkanten eines allgemeinen Berührungskegels

$$k = (\mathfrak{A}',\mathfrak{J}) - 2n'. \tag{3}$$

§ 4. Anzahlbestimmungen.

Ein großer Teil des Kapitels V meines Buches beschäftigt sich mit Anzahlbestimmungen. Ich gebe hier nur einige Beispiele.

a) Zahl der Inflexionstangenten von F in einer Ebene E, die keine besondere Lage hat.

Zählen wir jede der in E liegenden Inflexionstangenten so oft, wie der ihrem Berührungspunkt entsprechende Primteiler in $\mathfrak{d}_2$ enthalten ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen die gesuchte Zahl

$$i_e = k' = (\mathfrak{A}, \mathfrak{J}) - 2n. \tag{4}$$

Unter Benutzung der Äquivalenzen in § 4, Kap. II kann man für i_e mannigfache andere Darstellungen finden, z. B. folgende. Dividiert man die Äquivalenz III′ durch das Quadrat von I′, so folgt

$$\mathfrak{R}'^2 \mathfrak{D}_0' \mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}'^{n'-2}$$

und daraus

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{R}'^2 \mathfrak{D}_0' \mathfrak{J}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}'^{n'-2}). \tag{5}$$

Wir setzen (im wesentlichen wie *Salmon*)

$$(\mathfrak{A}', \mathfrak{R}) = \sigma, \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0) = \varrho_0, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}') = \sigma', \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0') = \varrho_0'$$

und erhalten aus (4) in Verbindung mit (5)

$$(n' - 2)\, a = k' + \varrho_0' + 2\sigma'. \tag{6}$$

b) Zahl der Inflexionstangenten von F durch einen nicht besonders liegenden Punkt.

Man findet für diese Zahl dual entsprechend zur vorigen

$$i_p = k = (\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - 2n'. \tag{7}$$

Hieraus folgt die (6) dual entsprechende Gleichung

$$(n - 2)\, a = k + \varrho_0 + 2\sigma. \tag{8}$$

Die Gleichungen (6) und (8) gehören zu den sogenannten *Salmon*schen Gleichungen. Es ist (9) die erste der Gleichungen A auf S. 650 in *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. des Raumes Bd. II (3. Aufl.). Was hier mit ϱ_0 bezeichnet ist, heißt bei *Salmon* ϱ.

c) Zahl der Inflexionstangenten durch zwei Gerade.

Auf ähnlichem Wege findet man für diese Zahl

$$i_g = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - 2(n + n'), \tag{9}$$

sodaß, wie es nach einem Satze von *Halphen* über Strahlenkongruenzen sein muß,

$$i_g = i_e + i_p. \tag{10}$$

Kap. VI. Die *Zeuthen-Segre*sche Invariante.

§ 1. Die *Zeuthen-Segre*sche Invariante in einfachen Fällen.

Es seien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ zwei zueinander äquivalente Primkurven. Ist ξ ein Parameter, so ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 - \xi \mathfrak{G}_2 \tag{1}$$

für jedes ξ eine zu $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ äquivalente Kurve, so daß uns durch (1) ein Kurvenbüschel auf F gegeben ist. Es sei mit $(\mathfrak{G})$ bezeichnet. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sind feste Punkte des Büschels. Ihre Zahl sei N. In jedem dieser Punkte mögen zwei allgemeine Kurven des Büschels *einen* Schnittpunkt haben. Es sei ferner δ die Zahl derjenigen Kurven des Büschels, die einen Doppelpunkt haben. Und schließlich sei π das Geschlecht einer allgemeinen Kurve des Büschels. Dann ist die Zahl

$$I = \delta - 4\pi - N$$

von der Wahl des Büschels unabhängig. Sie heißt die *Zeuthen-Segre*sche Invariante.

§ 2. Die *Zeuthen-Segre*sche Invariante bei beliebigen Singularitäten.

Sobald Besonderheiten vorkommen, verliert die *Zeuthen-Segre*sche Invariante ihren Sinn, da die in ihr vorkommenden Größen bis auf π nicht mehr definiert sind. Wir betrachten die einzelnen Besonderheiten, die eintreten können.

a) Die Kurven des Büschels können in den festen Punkten mehrfache Punkte haben mit beweglichen oder festen Tangenten. Es sei ν_a die Zahl der Zweige einer allgemeinen Kurve des Büschels, die durch die festen Punkte gehen, und es sei f die Zahl der festen Punkte. Dann ist zu setzen

$$N = 2\nu_a - f.$$

b) Es kann eintreten, daß eine Kurve des Büschels nicht nur einen Doppelpunkt hat, sondern irgend einen beliebigen mehrfachen Punkt. Welchen Beitrag liefert dann die Kurve zu δ? Oder eine Kurve des Büschels hat eine Primkurve mehrfach. Welchen Einfluß hat das auf δ?

Es seien

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots \mathfrak{V}_m$$

die Primkurven, die in einer der Kurven des Büschels $(\mathfrak{G})$ mehrfach enthalten sind. Jede kann natürlich nur in einer enthalten sein, die wir dadurch bekommen, daß wir ξ so wählen, daß $\mathfrak{G}_1 - \xi\mathfrak{G}_2$ in einem Punkte der betreffenden Kurve $\mathfrak{V}_a$ Null wird. Es sei $\mathfrak{V}_a$ in der Kurve $\mathfrak{G}$, in der es enthalten ist, in der Potenz φ_a enthalten. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V}_1^{\varphi_1}\ \mathfrak{V}_2^{\varphi_2}\ \ldots\ \mathfrak{V}_m^{\varphi_m} &= \mathfrak{V},\\
\mathfrak{V}_1^{\varphi_1-1}\ \mathfrak{V}_2^{\varphi_2-1}\ \ldots\ \mathfrak{V}_m^{\varphi_m-1} &= \mathfrak{V}^*,\\
\mathfrak{V}_1\ \mathfrak{V}_2\ \ldots\ \mathfrak{V}_m &= \mathfrak{V}'.
\end{aligned}$$

Es sei $\mathfrak{G}_a$ eine allgemeine Kurve des Büschels und es sei $\mathfrak{K}$ eine Kurve der kanonischen Klasse. Wir setzen

$$v = (\mathfrak{V}^*, \mathfrak{K}\mathfrak{G}_a^2) - (\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*).$$

Es sei $\mathfrak{G}$ irgend eine Kurve des Büschels. Es sei $\mathfrak{V}_{\mathfrak{G}}^*$ der Teil der Kurve $\mathfrak{V}^*$, der die in $\mathfrak{G}$ etwa enthaltenen Kurven $\mathfrak{V}_a$ in sich vereinigt. Wir setzen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{V}_{\mathfrak{G}}^*\mathfrak{G}',$$

so daß die Kurve $\mathfrak{G}'$ jede Primkurve, die in ihr vorkommt, nur in der ersten Potenz enthält. Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{G}'$ geht, und G' sei die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{G}'$.

Es sei *erstens* S nicht eine der festen Stellen. Wir bezeichnen die Zahl der Schnittpunkte, die die Kurven

$$\frac{\partial G'}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G'}{\partial v} = 0$$

im Punkte $u = v = 0$ haben, mit

$$\delta_S'(\mathfrak{G}).$$

Es sei *zweitens* S eine der festen Stellen des Büschels. Es sei $\mathfrak{G}_a$ eine allgemeine Kurve des Büschels und G_a ihre zugeordnete Funktion. Es sei z die Zahl der Schnittpunkte der Kurven

$$\frac{\partial G'}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G'}{dv} = 0$$

und z_a die der Kurven

$$\frac{\partial G_a}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial G_a}{\partial v} = 0$$

an der Stelle $u = v = 0$. Wir setzen in diesem Falle

$$\delta'_S(\mathfrak{G}) = z - z_a.$$

Wir setzen

$$\sum_S \delta'_S(\mathfrak{G}) = \delta'(\mathfrak{G}),$$

wo die Summe über alle Stellen S von $\mathfrak{G}$ zu erstrecken ist. Offenbar ist fast immer $\delta'_S(\mathfrak{G}) = 0$. Nur für Stellen, wo $\frac{\partial G'}{\partial u}$ und $\frac{\partial G'}{\partial v}$ gleichzeitig Null werden, ist $\delta'_S(\mathfrak{G})$ von Null verschieden, wenn S keine der festen Stellen ist. Wir setzen ferner

$$\sum_{\mathfrak{G}} \delta'(\mathfrak{G}) = \delta',$$

wo die Summe über alle Kurven des Büschels $\mathfrak{G}$ zu erstrecken ist.

Es ist jetzt das δ in der *Zeuthen-Segre*schen Invariante zu definieren durch

$$\delta = \delta' + v.$$

Zum ersten Male ist eine für jede algebraische Fläche und jedes Kurvenbüschel geltende Definition der *Zeuthen-Segre*schen Invariante gegeben in meiner Arbeit über diese Invariante in den Rend. del Circ. Mat. di Pal. Bd. 34. Dort habe ich δ formal anders definiert. Es war mir damals entgangen, daß ein mehrfacher Punkt einer Kurve des Büschels so oft zählt, wie die Zahl der Schnittpunkte von

$$\frac{\partial G'}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G'}{\partial v} = 0$$

im Punkte $u = v = 0$ beträgt.

§ 3. Das numerische Geschlecht.

Beim Betrachten birationaler Transformationen zeigt sich, daß $I + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ invariant ist, wo I die *Zeuthen-Segre*sche Invariante und $\mathfrak{K}$ eine Kurve der kanonischen Klasse ist. Es besteht die Beziehung

$$12p_n + 8 = I + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}),$$

wo p_n das numerische Geschlecht von F ist. Man kann diese Gleichung als Definition von p_n nehmen. Es liegt nahe, sie zur Berechnung von p_n

zu verwenden. Man erhält so Formeln für p_n, die für Flächen mit beliebigen Singularitäten gelten.

Kap. VII. *Salmon*sche Gleichungen.

Aus den Äquivalenzen in § 4, Kap. II können wir in folgender Art Gleichungen herleiten. Wenn

$$\mathfrak{P}_1 \frown \mathfrak{P}_2, \tag{1}$$

so ist für jede Kurve $\mathfrak{P}$

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}). \tag{2}$$

Um einen kurzen Ausdruck für die Bildung dieser Gleichung (2) zu haben, sagen wir, wir setzen die Äquivalenz (1) mit $\mathfrak{P}$ zusammen. In den Äquivalenzen in § 4, Kap. II kommen die 10 Kurven

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0', \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{J}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}' \tag{3}$$

vor. Dadurch, daß wir sie mit diesen Kurven und untereinander zusammensetzen, erhalten wir Gleichungen zwischen den $\frac{1}{2}\,10\,(10+1) = 55$ Schnittpunktszahlen

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}),\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'),\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0) \cdots\cdots (\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'). \tag{4}$$

Diese Gleichungen sagen aus: Von den 55 Schnittpunktszahlen (4) sind 6 unabhängig, z. B.

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}),\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_0),\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}),\ (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0),\ (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{R}),\ (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}).$$

Die andern lassen sich durch diese ausdrücken. Man erhält so 49 *Salmon*sche Gleichungen.

Über diese sei folgendes bemerkt.

1) Die Kurven (3) zerfallen in zwei Klassen, in solche, die von Parametern abhängen, nämlich

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{J}, \mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$$

und in andere, nämlich

$$\mathfrak{D}_0, \mathfrak{R}, \mathfrak{D}_0', \mathfrak{R}', \mathfrak{S}.$$

2) Die 55 Schnittpunktszahlen (4) zerfallen daher in drei Klassen, nämlich Zahl der Schnittpunkte zweier Kurven der ersten Art oder zweier der zweiten oder einer der ersten und einer der zweiten Art.

3) Es ist eine Aufgabe, die Schnittpunktszahlen, wenigstens in einfachen Fällen, geometrisch zu deuten. Das ist keineswegs in allen Fällen möglich. Solche Deutungen sind z. B.

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) =$ Ordnung von F.

$(\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - 2n' =$ Zahl der Rückkehrkanten eines allgemeinen Berührungskegels.

$\frac{1}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{J}) =$ Rang der Rückkehrkurve, wenn diese Primkurve ist.

4) Sind die beiden Kurven, um deren Schnittpunktszahl es sich handelt, beide nicht von Parametern abhängig, so werden die Stellen, wo sie sich schneiden, singuläre Punkte von F sein, und man kann dann die Schnittpunktszahl als Summe darstellen, wo jeder Summand angibt, welchen Beitrag einer der singulären Punkte von F zu der Zahl liefert. Das geht aber i. a. nur, wenn die beiden Kurven teilerfremd sind. Auf dieser Art entstehen die langen Formeln von *Salmon* und *Cayley*. Nehmen wir ein Beispiel: Es besteht die Gleichung

$$(5) \quad (n-2)\,c = (\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) - 3\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + (\mathfrak{R}, \mathfrak{D}_0) + 2\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{A}').$$

Es ist dies die dritte der Gleichungen A auf S. 650 in *Salmon - Fiedler*, Analyt. Geom. des Raumes II (3. Aufl.). Bezeichnen wir die von den kondensierten Kurven befreite Rückkehrkurve mit $\mathfrak{R}_0$ und setzen

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{V}\mathfrak{R}_0^1, \quad \sigma = (\mathfrak{R}_0, \mathfrak{A}'),$$

so haben wir

$$(n-2)\,c = 2\sigma + (\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) - 3(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + (\mathfrak{R}, \mathfrak{D}_0) + 2(\mathfrak{V}, \mathfrak{A}').$$

Hier hat σ dieselbe Bedeutung wie bei *Salmon*. Sind jetzt $H_1, H_2, \ldots H_l$ singuläre Punkte von F von bestimmter Art, z. B. H_1 ein isolierter zweifacher Punkt, H_2 ein biplanarer Doppelpunkt usw., so kann man berechnen, welchen Beitrag ein solcher Punkt zu

$$(6) \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) - 3(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + (\mathfrak{R}, \mathfrak{D}_0) + 2(\mathfrak{V}, \mathfrak{A}')$$

liefert. Liefert H_a den Beitrag μ_a und hat F etwa h_a Punkte von der Art wie H_a, so wird

$$(7) \qquad (n-2)\,c = 2\sigma + \Sigma \mu_a h_a.$$

Man sieht, die Formel wird nie fertig, wenn man sie in dieser Form schreibt, wie *Salmon* und *Cayley* es tun. Jede neue Singularität,

die man zuläßt, liefert einen neuen Summanden. Die Formel (5) enthält alle diese Formeln in konzentrierter Form. In dem Buche zeige ich an einigen Beispielen, wie man die Koeffizienten μ_a berechnen kann. Aber die Darstellung (7) ist nicht immer möglich, nämlich dann nicht, wenn zwei der Kurven, deren Schnittpunktszahlen in (6) vorkommen, einen gemeinsamen Teiler haben, der nicht eine kondensierte Kurve ist.

Großes Hauptquartier, im Dezember 1917.

Über Tschebyscheffsche Polynome.

Von Herrn *Georg Faber* in München.

Einleitung.

Ich erkläre zuerst einige Bezeichnungen und gebe sodann einen kurzen Überblick über den Inhalt der vorliegenden Abhandlung.

Unter C (später auch C_r genannt) verstehe ich in der komplexen $x = \xi + i\eta$-Ebene eine doppelpunktlose geschlossene Kurve, die aus einem einzigen singularitätenlosen analytischen Zuge bestehen soll. Durch diese Voraussetzung werden von vornherein Schwierigkeiten mehr nebensächlicher Art hintangehalten; hinterher lassen sich (worauf ich nicht näher eingehe) durch Stetigkeitsbetrachtungen und stellenweise mit einigen Einschränkungen die Ergebnisse auf allgemeinere Kurven ausdehnen. Das Innere von $C\,(C_r)$ werde mit $I\,(I_r)$, das Äußere mit $A\,(A_r)$ bezeichnet, C jedesmal nicht mitgerechnet; die durch Hinzunahme von C abgeschlossenen Innen- und Außengebiete mögen $\bar{I}\,(\bar{I}_r)$ und $\bar{A}\,(\bar{A}_r)$ heißen.

Es gibt dann bekanntlich für jedes $n = 1, 2, 3 \ldots$ ein Polynom n-ten Grades

$$(1.) \qquad T_n(x) = x^n + t_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + t_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \cdots + t_1^{(n)} x + t_0^{(n)}$$

mit folgenden kennzeichnenden Eigenschaften:

1) der Koeffizient von x^n in $T_n(x)$ ist 1,

2) alle von $T_n(x)$ verschiedenen Polynome n-ten Grades

$$(2.) \qquad Q_n(x) = x^n + q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0,$$

welche ebenfalls die Eigenschaft 1) besitzen, haben in $\bar{I}$ ein Maximum ihres absoluten Betrags, welches größer ist als das Maximum g_n von $|T_n(x)|$.

$T_n(x)$ möge das zu C gehörige *Tschebyscheff*sche Polynom n-ter Ordnung heißen. Diese Benennung scheint mir deshalb berechtigt, weil die ganze Fragestellung und ihre ersten grundlegenden Ergebnisse auf *Tschebyscheff* zurückgehen. Er selbst hat sich freilich nur mit dem Grenzfall beschäftigt, in welchem $\bar{I}$ zu einer (doppelt zählenden, reellen) Strecke ausartet. Schriften, in denen nach ihm der nämliche Gegenstand behandelt und verallgemeinert wurde, sind zahlreich; die vorliegende Abhandlung knüpft an keine derselben an und ist für sich allein verständlich.

Von den *Tschebyscheff*schen Polynomen weiß man bisher nicht viel mehr, als daß sie existieren. Wirklich bilden kann man die $T_n(x)$ nur in dem *Tschebyscheff*schen Falle der doppelt zählenden Strecke; sind nämlich deren Endpunkte ± 1, was man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, so ist

$$(3.) \qquad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos x),$$

m. a. W.: $T_n(x)$ ist das Polynom, das $\frac{1}{2^{n-1}} \cos n\vartheta$ durch $x = \cos \vartheta$ ausdrückt. Außerdem ist selbstverständlich für den Fall des Kreises, dessen Gleichung $|x - a| = \text{const.}$ ist, $T_n(x) = (x-a)^n$, und für eine verallgemeinerte Lemniskate, deren Gleichung $|\Pi_m(x)| = \text{const.}$ lautet, wo $\Pi_m(x) = x^m + \cdots$ ein Polynom m-ten Grades ist, ist ebenso selbstverständlich $T_{nm}(x) = (\Pi_m(x))^n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

Ich beweise im folgenden, daß man auch für jede Ellipse $T_n(x)$ leicht bilden kann; es sind nämlich für alle Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 die $T_n(x)$ die nämlichen wie die von *Tschebyscheff* für die Strecke $+1, -1$ gefundenen. Da diese doppelt überdeckte Strecke ein Grenzfall jener Ellipsen ist, wird durch meinen Beweis auch das ursprüngliche *Tschebyscheff*sche Ergebnis neu bewiesen und zugleich einfacher als bisher. Auch in anderen Fällen lassen sich die $T_n(x)$ in geschlossener Form finden; ganz allgemein freilich ist das selbstverständlich nicht möglich. Jedoch (und das ist das Hauptziel der vorliegenden Abhandlung) können immer so gute Näherungen $P_n(x)$ für die $T_n(x)$ angegeben werden, daß es gelingt, eine überraschende Menge von Sätzen über die $T_n(x)$ zu

beweisen: über die Lage ihrer Nullstellen sowie der Nullstellen der Ableitungen $T_n'(x)$, $T_n''(x)\ldots$, über die Darstellung von Funktionen mittels Interpolation an diesen Nullstellen, über Reihen $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu T_\nu(x)$, über die Größenordnung der Zahlen g_n u. a. m. In den verhältnismäßig wenigen Fällen, in welchen die $T_n(x)$ wirklich hingeschrieben werden können, fallen sie übrigens mit ihren Näherungen $P_n(x)$ zusammen.

Auch verwandte Aufgaben, wie die folgenden, lassen sich in ähnlicher Weise durchführen:

Die Polynome

$$R_n(x) = x^n + r_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + r_0^{(n)} \tag{4.}$$

mit Nullstellen ausschließlich in $\bar{I}$ zu untersuchen, für die das Minimum von $|R_n(x)|$ auf C möglichst groß ausfällt.

Die Polynome

$$S_n(x) = x^n + s_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + s_0^{(n)}, \tag{5.}$$

ebenfalls mit Nullstellen ausschließlich in $\bar{I}$, zu untersuchen, für welche die Schwankung von $|S_n(x)|$ auf C möglichst klein ausfällt.

Die Polynome

$$K_n(x) = k_n^{(n)} x^n + k_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + k_0^{(n)} \tag{6.}$$

zu untersuchen, die einer gegebenen in $\bar{I}$ regulären Funktion $F(x)$ in gleicher Weise zugeordnet sind, wie die $T_n(x)$ der Null, nämlich so, daß die Differenz

$$|K_n(x) - F(x)| \tag{7.}$$

auf C möglichst klein ausfällt.

1. Erzeugung der Näherungspolynome $P_n(x)$.

Mit den erwähnten Annäherungs- oder Ersatzpolynomen $P_n(x)$ für die $T_n(x)$ komme ich auf Polynome zurück, die ich zum ersten Male in meiner Doktor-Dissertation*) betrachtet habe; nur nenne ich jetzt $P_n(x)$, was dort $-P_n(x)$ hieß. Um das Verständnis der vorliegenden Abhandlung von jeder früheren völlig unabhängig zu machen, wiederhole ich zunächst mit erheblichen Abänderungen und Ergänzungen die Erklärung der $P_n(x)$ und die Beweise ihrer Haupteigenschaften.

*) Der in Betracht kommende Abschnitt der Dissertation ist auch Math. Ann. Bd. 57, S. 389—408 abgedruckt.

Durch die Funktion

$$(8.) \quad x = \psi(t) = \frac{1}{t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t) \quad (|t| < r)$$

soll das Gebiet A der x-Ebene auf das Innere eines Kreises $|t| = r$ der t-Ebene abgebildet werden, so daß die Punkte $x = \infty$ und $t = 0$ einander entsprechen. Die Zahlen $a_0, a_1, a_2 \ldots$, sowie r sind dadurch eindeutig bestimmt; für kongruente Kurven C hat r den nämlichen Wert; sind die Kurven C, C' ähnlich und verhalten sich ihre Umfänge wie $s:s'$, so ist das Verhältnis der zugehörigen Zahlen r, r' gleich $s':s$; einer Kurve C'', die ganz innerhalb C liegt, entspricht ein $r'' > r$. Nach den über C gemachten Voraussetzungen konvergiert die auf der rechten Seite von (8.) stehende Potenzreihe $\mathfrak{P}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots$ nicht nur für $|t| \leqq r$, sondern in einem größeren Kreise $|t| \leqq r'$ und liefert daselbst noch eine eindeutig umkehrbare Abbildung. Mit K_ϱ bezeichne ich die Kreise $|t| = \varrho$ $(0 < \varrho \leqq r')$ und mit C_ϱ die ihnen vermöge (8.) entsprechenden Kurven der x-Ebene; C_r ist somit soviel wie C.

Außerhalb eines gewissen Kreises $|x| = R$ gilt die Umkehrung von (8.):

$$(9.) \qquad \frac{1}{t} = x + b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots,$$

ferner in einem gewissen Kreise $|t| < r''$:

$$(10.) \qquad \frac{1}{x} = t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots.$$

Man darf noch voraussetzen, daß

$$(11.) \qquad a_0 = 0$$

ist, da dies durch eine Parallelverschiebung der Kurve C immer erreicht werden kann; daraus folgt

$$(12.) \qquad b_0 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Hinterher läßt sich die Voraussetzung (11.) immer wieder rückgängig machen, indem man $x - a_0$ statt x schreibt.

Die Polynome $P_n(x)$ sind nunmehr folgendermaßen bestimmt:

1) der Koeffizient von x^n in $P_n(x)$ ist 1;

2) drückt man $P_n(x)$ vermöge (8.) durch t aus, so sind die Koeffizienten von t^{-n+1}, t^{-n+2}, $\cdots$ t^{-1}, t^0, sämtlich gleich Null, so daß also $P_n(x)$ die Form

$$(13.) \qquad P_n(x) = \frac{1}{t^n} + t\,\mathfrak{P}_n(t)$$

hat, wo $\mathfrak{P}_n(t)$ für $|t| \leqq r'$ konvergiert.

Es ist somit $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und

$$(14.) \qquad x P_n(x) = \frac{1}{t^{n+1}} + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \frac{a_2}{t^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{t} + a_n + a_{n+1}\,t + \cdots,$$

also wegen (13):

$$(15.) \qquad P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - a_1\,P_{n-1}(x) - a_2\,P_{n-2}(x) \ldots - a_{n-1}\,P_1(x) - a_n.$$

Eine andere, manchmal bequemere Formel zur Berechnung der $P_n(x)$ erhält man, wenn man Gleichung (9.) in die n^{te} Potenz erhebt und auf der rechten Seite nur die Glieder mit nicht negativen Exponenten beibehält; die weggelassenen Glieder haben nämlich wegen (10.) die Form $t\,\overline{\mathfrak{P}(t)}$.

Wenn z. B. C eine verallgemeinerte Lemniskate ist, so ist

$$(16.) \qquad \frac{1}{t} = \sqrt[m]{d_0 + d_1 x + \cdots + d_{m-1} x^{m-1} + x^m},$$

also für $n = m\mu$:

$$(17.) \qquad P_n(x) = (d_0 + d_1 x + \cdots + d_{m-1} x^{m-1} + x^m)^{\mu}.$$

2. Die erzeugende Funktion der $P_n(x)$.

Um allgemeine Sätze über die $P_n(x)$ zu finden, ist ihre Darstellung mittels einer erzeugenden Funktion dienlicher als die beiden soeben angegebenen Berechnungsarten. Liegt x in I_r, so ist

$$(18.) \qquad \frac{\tau \cdot \psi'(\tau)}{x - \psi(\tau)} = \frac{1 - \tau^2\,\mathfrak{P}'(\tau)}{1 - \tau x + \tau\,\mathfrak{P}(\tau)}$$

für $|\tau| < r$ nach Potenzen von τ entwickelbar, und der Koeffizient von τ^n ist offenbar ein Polynom n-ten Grades in x, dessen höchster Koeffizient 1 ist. Ersetzt man in (18.) x durch $\psi(t)$, so entsteht eine Funktion der beiden Veränderlichen τ, t, welche im Gebiete $|\tau| \leqq r'$, $|t| \leqq r'$ für $\tau = t$ wie $\frac{t}{t-\tau}$ unendlich wird, sonst aber regulär ist; daher ist

$$(19.) \qquad \frac{\tau \cdot \psi'(\tau)}{x - \psi(\tau)} = \frac{t}{t - \tau} + \mathfrak{P}(t, \tau),$$

wo $\mathfrak{P}(t, \tau)$ eine für $|t| \leqq r'$; $|\tau| \leqq r'$ konvergente und für $t = 0$, $|\tau| \leqq r'$ ebenso wie für $\tau = 0$, $|t| \leqq r'$ verschwindende Potenzreihe ist. Entwickelt man also die rechte Seite von (19.) nach Potenzen von τ, so wird der

Faktor von τ^ν gleich $\frac{1}{t^\nu} + t\mathfrak{P}_\nu(t)$, er hat somit, wenn man ihn wieder als Funktion von x schreibt, die kennzeichnenden Eigenschaften von $P_\nu(x)$.

Ebensogut kann man $P_\nu(x)$ als Koeffizienten von $\tau^{\nu-1}$ in

$$(20.) \qquad \frac{\psi'(\tau)}{x-\psi(\tau)} = \frac{1}{\tau} + \frac{x-\mathfrak{P}(\tau)-\tau\mathfrak{P}'(\tau)}{1+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x} = \frac{1}{\tau} - \frac{d\,ln(1+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x)}{d\tau}$$

ansehen. Reduziert sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau) = \psi(\tau) - \frac{1}{\tau}$ auf ein Polynom k-ten Grads, und sind $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{k+1}$ die $k+1$ Wurzeln der Gleichung $1+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x = 0$, so folgt

$$(21.) \qquad P_\nu(x) = -\frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{d^\nu\, ln(1+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x)}{d\tau^\nu}\right)_{\tau=0} = \frac{1}{\tau_1^{\,\nu}} + \frac{1}{\tau_2^{\,\nu}} + \cdots + \frac{1}{\tau_{k+1}^{\nu}}.$$

Die hier auf der rechten Seite stehende symmetrische Funktion der Wurzeln $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_{k+1}$ ist dann noch als ganze Funktion der Koeffizienten obiger Gleichung auszudrücken.

3. Die Polynome $T_n(x) \equiv P_n(x)$ für eine Ellipse.

Der einfachste Fall, in welchem die Darstellung (21.) für $P_\nu(x)$ verwendbar wird, ist der folgende:

$$(22.) \qquad x = \frac{1}{t} + t \quad .(|t| \leqq 1),$$
$$\tau_1 = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}, \quad \tau_2 = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{1}{\tau_1};$$

den Kreisen K_ϱ: $t = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$ $(\varrho < 1)$ entsprechen Ellipsen:

$$(23.) \qquad \xi = \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta, \quad \eta = \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta$$

mit den Halbachsen $\varrho + \frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho} - \varrho$, während dem Kreise $|t| = r' = 1$ die zur doppelt überdeckten Strecke $-2, +2$ ausgeartete Ellipse entspricht. Die Funktion $P_n(x)$ ist im vorliegenden Falle gleich

$$\frac{1}{\tau_1^{\,n}} + \frac{1}{\tau_2^{\,n}} = \tau_1^{\,n} + \frac{1}{\tau_1^{\,n}} = \left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)\cos n\vartheta + i\left(\varrho^n - \frac{1}{\varrho^n}\right)\sin n\vartheta,$$

wo jetzt $\tau_1 = \varrho e^{i\vartheta}$ gesetzt ist. Für den diesem Punkte τ_1 entsprechenden Ellipsenpunkt x ist $|P_n(x)|^2 = \left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)^2 \cos^2 n\vartheta + \left(\varrho^n - \frac{1}{\varrho^n}\right)^2 \sin^2 n\vartheta$ $= \varrho^{2n} + \frac{1}{\varrho^{2n}} + 2\cos 2n\vartheta$. Das Maximum des absoluten Betrags ist somit $\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}$; es wird in $2n$ Ellipsenpunkten angenommen, deren Parameterwerte $\vartheta = \frac{2k\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \ldots 2n-1)$ sind. Es läßt sich leicht beweisen, daß für irgend ein anderes Polynom $Q_n(x)$ der Form (2.) das Maximum des absoluten Betrags $|Q_n(x)|$ auf der Ellipse (23.) größer als $\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}$ ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= P_n(x) + A_1 P_{n-1}(x) + \cdots + A_{n-1} P_1(x) + A_n \\ &= \left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right) \cos n\vartheta + i\left(\varrho^n - \frac{1}{\varrho^n}\right) \sin n\vartheta \\ &\quad + \sum_0^{n-1\nu} (C_\nu \cos \nu\vartheta + B_\nu \sin \nu\vartheta), \end{aligned} \tag{24.}$$

wo die A_ν, B_ν, C_ν irgendwelche komplexe, nicht durchweg verschwindende Konstanten sind. Man bilde nun $|Q_n(x)|^2$, indem man die rechte Seite von (24.) mit der dazu konjugierten Zahl multipliziert, und forme die sich so ergebenden Produkte und Quadrate von sin und cos in sin und cos der Summen und Differenzen der in den Faktoren auftretenden Winkel um; so erhält man

$$|Q_n(x)|^2 = |P_n(x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_0^{n-1\nu} (|C_\nu|^2 + |B_\nu|^2) + \sum_1^{2n-1\nu} (\gamma_\nu \cos \nu\vartheta + \beta_\nu \sin \nu\vartheta). \tag{25.}$$

Hierin setze man $x = \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) \cos \vartheta_k + i\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) \sin \vartheta_k$ mit $\vartheta_k = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots 2n-1)$ und addiere die erhaltenen Gleichungen; dabei heben sich die Beiträge der zweiten Zeile auf der rechten Seite von (25.) bekanntlich weg, und man findet:

$$\begin{aligned} \sum_0^{2n-1\nu} \left|Q_n\left(\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos \vartheta_\nu + i\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin \vartheta_\nu\right)\right|^2 &= \\ 2n\left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)^2 + n \sum_0^{n-1\nu} (|C_\nu|^2 + |B_\nu|^2) & \\ > 2n\left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)^2. & \end{aligned} \tag{26.}$$

Es ist also mindestens einer der $2n$ Summanden auf der linken Seite von (26.) größer als $\left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)^2$, w. z. b. w.

Damit sind gleichzeitig für andere Kurven *Tschebyscheff*sche Polynome gefunden; es habe z. B. die Gleichung zwischen x und t die Form

$$(27.) \qquad x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_1 x + q_0 = \frac{1}{t^m} + t^m,$$

dann ist für jede Kurve C_ϱ dieser Abbildung

$$(28.) \qquad T_{ml}(x) \equiv P_l(x_m + q_{m-1}x^{m+1} + \cdots + q_1 x + q_0),$$

wobei P_l die nämliche Bedeutung hat wie soeben im Falle der Ellipse.

4. Abschätzung der Zahlen $g_n = \mathrm{Max}\,|\,T_n(x)\,|$ auf C.

Da die auf der rechten Seite von (19.) vorkommende Potenzreihe $\mathfrak{P}(t,\tau) = \sum_1^\infty{}^\nu\, t\,\mathfrak{P}_\nu(t)\tau^\nu$ für $|t| \leqq r'$, $|\tau| \leqq r'$ konvergiert, ist nach dem *Cauchy*schen Koeffizientensatze:

$$(29.) \qquad |\mathfrak{P}_\nu(t)t| < \frac{G}{r'^\nu},$$

wo G eine von t und ν unabhängige Zahl ist. Für alle x auf C_ϱ ($\varrho < r'$) ist nach (13):

$$(30.) \qquad P_\nu(x) = \frac{1}{t^\nu} + t\mathfrak{P}_\nu(t) \text{ mit } t = \varrho e^{i\vartheta},$$

also wegen (29.) und wegen $\varrho < r'$:

$$(31.) \qquad P_\nu(x) = \frac{1}{t^\nu}(1 + \vartheta_\nu(x)G),$$

wo $|\vartheta_\nu(x)|$ gleichmäßig für alle x auf $C_\varrho < \left(\frac{\varrho}{r'}\right)^\nu$ bleibt.

Aus (31.) folgt für irgend ein festes x in $A_{r'}$:

$$(32.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{P_{\nu+1}(x)}{P_\nu(x)} = \frac{1}{t}, \text{ also auch } \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(x)|} = \frac{1}{|t|}.$$

Die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu P_\nu(x)$, wo $\overline{\lim}\,\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho < r'$, divergiert daher in A_ϱ und konvergiert in I_ϱ nach einer daselbst regulären analytischen Funktion $F(x)$. Da also die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu P_\nu(z)$ für alle z auf C_σ gleichmäßig kon-

vergiert, falls $r' > \sigma > \varrho$, so kann man sie gliedweise über C_σ integrieren; multipliziert man vor der Integration noch mit $\frac{1}{2\pi i}\,\tau^{n-1}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ und führt man an Stelle von z die Veränderliche τ vermöge der Gleichung $z = \psi(\tau)$ ein, so ergibt sich nach dem *Cauchy*schen Integralsatze:

$$(33.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\sigma} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(\psi(\tau))\,\tau^{n-1}\,d\tau = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{a_\nu}{2\pi i}\int_{K_\sigma} P_\nu(\psi(t))\,\tau^{n-1}\,d\tau = a_n .$$

Die Koeffizienten a_n sind also eindeutig bestimmt: eine Funktion kann im Gebiete I nicht auf zwei verschiedene Weisen durch Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(x)$ dargestellt werden.

Um umgekehrt zu zeigen, daß jede in I_ϱ $(\varrho < r')$ reguläre analytische Funktion in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(x)$ entwickelt werden kann, hat man nur in dem *Cauchy*schen Integrale

$$(34.)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\sigma} \frac{F(z)}{z-x}\,dz$$

mit $\varrho < \sigma < r'$ für z die neue Veränderliche τ vermöge $z = \psi(\tau)$ einzuführen, wodurch man erhält:

$$(35.)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\sigma} \frac{F(\psi(\tau))}{x-\psi(\tau)}\,\psi'(\tau)\,d\tau ,$$

indem man mit Berücksichtigung von (19.) nach Potenzen von τ entwickelt und dann gliedweise integriert, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz für alle $|\tau| = \sigma$ und für irgend ein x in I_σ erlaubt ist:

$$(36.)\qquad F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(x)$$

mit

$$(37.)\qquad a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\sigma} F(\psi(\tau))\,\tau^{\nu-1}\,d\tau .$$

Die Bedingung: x in I_σ bedeutet keine Beschränkung, denn C_σ darf beliebig nahe an C_ϱ verlaufen, x kann also irgendwo in I_ϱ liegen.

Ist $F(x)$ noch auf C_ϱ regulär, so kann man natürlich in (35.), (37.) ebenso gut über K_ϱ statt über K_σ integrieren. Als zu entwickelnde Funktion wähle man in (36.) insbesondere $T_n(x)$:

$$(38.)\qquad T_n(x) = P_n(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}(x) + \cdots + a_1^{(n)} P_1(x) + a_0^{(n)} .$$

Da hier $a_n = 1$ ist, erhält man aus (37.) folgende Abschätzung:

$$(39.) \qquad 1 < \frac{r^{n-1}}{2\pi} \int_{K_r} |T_n(\psi(\tau))|\,|d\tau| < g_n r^n;$$

(nur in dem ausgeschlossenen Falle, wo die C_ϱ Kreise wären, müßte es hier $=$ statt $<$ heißen). Andrerseits ist $g_n \leqq \text{Max}\,|P_n(x)|$ auf C, also nach (31.):

$$(40.) \qquad g_n < \frac{1}{r^n}\left(1 + G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right).$$

(39.) und (40.) lassen sich zusammenfassen in

$$(41.) \qquad g_n = \frac{1}{r^n}\left(1 + \vartheta G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right),$$

wo G, ϑ von n unabhängige Zahlen sind und ϑ zwischen 0 und 1 liegt. Es ist also

$$(42.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{1}{r}, \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{g_n} = \frac{1}{r}.$$

Im folgenden soll stets G, so wie hier, eine von x und n unabhängige Schranke bedeuten, nicht notwendig jedesmal die nämliche; desgleichen sollen ϑ, Θ immer Zahlen zwischen 0 und 1 darstellen, $\vartheta(x)$ eine Funktion, die dem Betrage nach < 1 bleibt.

5. $P_n(x)$ als Näherung für $T_n(x)$.

Nach Gleichung (38.) ist:

$$T_n(x) = P_n(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}(x) + \cdots + a_1^{(n)} P_1(x) + a_0^{(n)};$$

liegt $x = \psi(t)$ in $A_{r'}$, so erhält man daraus die Potenzentwicklung:

$$(43.) \quad T_n(x) = \frac{1}{t^n} + \frac{a_{n-1}^{(n)}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1^{(n)}}{t} + a_0^{(n)} + \cdots \qquad (0 < |t| < r').$$

Insbesondere folgt für $|t| = r$ nach einem bekannten Satze:

$$(44.) \qquad g_n^2 > \frac{1}{r^{2n}} + \frac{|a_{n-1}^{(n)}|^2}{r^{2n-2}} + \cdots + \frac{|a_1^{(n)}|^2}{r^2} + |a_0^{(n)}|^2$$

$$> \frac{1}{r^{2n}} + \frac{|a_{n-\nu}^{(n)}|^2}{r^{2n-2\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Aus (40.) aber folgt

$$(45.) \qquad g_n^2 < \frac{1}{r^{2n}}\left(1 + G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right),$$

mithin durch Vergleichung von (44.) (45.):

$$|a_{n-\nu}^{(n)}| < r^{-\nu} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (\nu = 1, 2 \dots n) \tag{46.}$$

und wegen (32.):

$$|a_{n-\nu}^{(n)}|\,|P_{n-\nu}(x)| < \frac{1}{r^{\nu}\varrho^{n-\nu}} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \tag{47.}$$

für alle x auf und außerhalb C_ϱ. Daraus folgt weiter durch Addition

$$\begin{aligned} |a_{n-1}^{(n)}|\,|P_{n-1}(x)| + |a_{n-2}^{(n)}|\,|P_{n-2}(x)| + \cdots + |a_1^{(n)}|\,|P_1(x)| + |a_0^{(n)}| \\ < \frac{1}{\varrho^{n-1} r} \frac{1-\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n}{1-\frac{\varrho}{r}} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \\ < \frac{1}{\varrho^n} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}} \text{ für } \varrho \leqq r. \end{aligned} \tag{48.}$$

Diese Abschätzung, zusammen mit Gleichung (38.), liefert schließlich folgendes Ergebnis:

$$|T_n(x) - P_n(x)| < \frac{1}{\varrho^n} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}} \tag{49.}$$

für alle x auf C_ϱ, sofern $\varrho \leqq r$ ist.

Mit Beachtung von (31.) findet man weiter für die nämlichen x:

$$T_n(x) = P_n(x)\left(1 + \vartheta(x) G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}\right), \tag{50.}$$

wo $|\vartheta(x)| < 1$ bleibt gleichmäßig für alle x in $\bar{A}_r$.

Führt man wieder vermöge $x = \psi(t)$ auf der rechten Seite von (50.) die Veränderliche t ein, so findet man mit abermaliger Benutzung von (31.):

$$T_n(x) = \frac{1}{t^n}\left(1 + \vartheta(x) G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}\right) \tag{51.}$$

für alle x in $\bar{A}_r$ mit $|\vartheta(x)| < 1$; (unter $\vartheta(x)$ wird nicht jedesmal die gleiche Funktion verstanden, aber immer eine, deren Betrag in einem näher bezeichneten Gebiete < 1 ist.)

Es ist klar, daß man in dieser Gleichung für r auch irgendeine Zahl $\varrho < r$ denken darf, sofern man nur dann auch unter $T_n(x)$ ein *Tschebyscheff*sches Polynom der Kurve C_ϱ versteht; so findet man

$$T_n(x) \text{ für } C_r = (T_n(x) \text{ für } C_\varrho) \cdot \left(1 + \vartheta(x) G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}\right) \tag{52.}$$

gleichmäßig für alle x in $\bar{A}_\varrho$, falls $\varrho < r$.

Auch ist einleuchtend, daß in (50.) die Funktionen $T_n(x)$ und $P_n(x)$ ihre Plätze vertauschen dürfen, ebenso wie in (51.) $T_n(x)$ mit $\frac{1}{t^n}$.

Aus (51.) folgt noch

$$\lim_{n=\infty} \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} = \frac{1}{t} \tag{52.}$$

gleichmäßig für alle x in $\bar{A}_r$.

Die Gleichungen (51.), (52.) sind Verschärfungen und Verallgemeinerungen von (41.), (42.).

Daß die Formel (51.) nicht die bestmögliche Abschätzung liefert, bedeutet weiter keinen Nachteil (der Exponent $\frac{n}{3}$ auf der rechten Seite ließe sich beispielsweise leicht durch einen größeren ersetzen). Dagegen soll noch eine Abschätzung von $T_n(x)$ in I_r, zum mindesten zwischen $C_{r'}$ und C_r abgeleitet werden; eine solche wird durch (51.) nicht geleistet. Für irgendein x innerhalb des von $C_{r'}$ und C_r begrenzten Ringgebietes liefert die bei (48.) angestellte Überlegung nur:

$$|a_{n-1}^{(n)}|\,|P_{n-1}(x)| + |a_{n-2}^{(n)}|\,|P_{n-2}(x)| + \cdots + |a_1^{(n)}|\,|P_1(x)| + |a_0^{(n)}| < \frac{1}{r^n} G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}. \tag{53.}$$

Und hieraus kann man, wie oben, weiter schließen, daß wenigstens für hinreichend kleines $\eta > 0$ in $\bar{A}_{r+\eta}$ gilt:

$$T_n(x) = P_n(x)\,(1 + \vartheta(x)\, G\alpha^n) \tag{54.}$$

oder auch

$$T_n(x) = \frac{1}{t^n}\,(1 + \vartheta(x)\, G\alpha^n); \tag{55.}$$

dabei bedeutet α eine von x und n unabhängige positive Zahl < 1.

Die Gleichungen (38.) für $n = 1, 2 \ldots$ gestatten auch umgekehrt nacheinander $P_1(x)$, $P_2(x)$ ... durch die Funktionen $T_\nu(x)$ auszudrücken:

$$P_n(x) = T_n(x) + b_{n-1}^{(n)} T_{n-1}(x) + b_{n-2}^{(n)} T_{n-2}(x) + \cdots + b_1^{(n)} T_1(x) + b_0^{(n)}. \tag{56.}$$

Entwickelt man die rechte Seite von (56.) vermöge (38.) nach Funktionen $P_\nu(x)$, so findet man durch Koeffizientenvergleichung:

$$0 = a_{n-1}^{(n)} + b_{n-1}^{(n)}, \tag{57.}$$

also wegen (46.):

$$|b_{n-1}^{(n)}| < r^{-1} G \beta^n, \tag{58.}$$

wo zur Abkürzung β für $\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}$ geschrieben ist.

Angenommen nun, es sei festgestellt, daß für jedes n und für $\nu = n-1,\ n-2, \ldots m+1$

(59.) $$b_\nu^{(n)} < 2G\beta^n r^{-n+\nu}$$

ist, was ja für $\nu = n-1$ nach (58.) tatsächlich zutrifft, dann folgt wieder durch Koeffizientenvergleichung:

(60.) $$b_m^{(n)} + b_{m+1}^{(n)} a_m^{(m+1)} + b_{m+2}^{(n)} a_m^{(m+2)} + \cdots + b_{n-1}^{(n)} a_m^{(n-1)} + a_m^{(n)} = 0,$$

also wegen (46.) und (59.):

(61.) $$|b_m^{(n)}| < 2G^2 r^{-n+m}\beta^n[\beta^{m+1} + \beta^{m+2} + \cdots + \beta^{n-1}] + G\beta^n r^{-n+m}$$

$$< \beta^n r^{-n+m}\left[G + \frac{2G^2}{1-\beta}\beta^{m+1}\right];$$

G bedeutet hier und im folgenden die größere der beiden in (46.) und (59.) vorkommenden G-Zahlen. Danach gilt die Ungleichung (59.) auch noch für $\nu = m$, falls nur

(62.) $$\frac{2G}{1-\beta}\beta^{m+1} < 1 \text{ ist.}$$

m bedeute von jetzt ab die kleinste Zahl $\geqq 0$, welche dieser Ungleichung genügt (m hängt nicht von n ab). Dann ist (59.) nur noch für $\nu \leqq m-1$ zu beweisen; setzt man $1 + \frac{2G}{1-\beta}$ zur Abkürzung $= k$, so erhält man (vgl. (61.))

(63.) $$|b_{m-1}^{(n)}| < \beta^n r^{-n+m-1} G k,$$

ebenso, indem man nur auf der rechten Seite von (59.) $2G$ durch die größere Zahl kG ersetzt:

(64.) $$|b_{m-2}^{(n)}| < \beta^n r^{-n+m-2} G k^2$$

und so fortschließend:

(65.) $$|b_{m-\nu}^{(n)}| < \beta^n r^{-n+m-\nu} G k^m \text{ für } \nu = 1, 2 \ldots m-1.$$

Schreibt man also zum Schlusse noch K für Gk^m, so ist K genau wie G eine von x und n unabhängige Schranke, und es gilt ganz allgemein für jedes n und für $\nu = 1, 2 \ldots n-1$ die der Ungleichung (46.) völlig entsprechende:

(66.) $$|b_{n-\nu}^{(n)}| < r^{-\nu} K \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Es wird nicht nur $T_n(x)$ durch $P_n(x)$ bei großem n angenähert dargestellt, sondern auch $T_n'(x)$ durch $P_n'(x)$, $T_n''(x)$ durch $P_n''(x)$ usw.

Es ist nämlich (vgl. (31.)):

$$(67.) \qquad P_n'(x) = \frac{-n}{t^{n+1}\psi'(t)}\left(1 + G \cdot \vartheta(x)\left(\frac{|t|}{r'}\right)^n\right).$$

Ferner ist (s. (38.)):

$$(68.) \qquad T_n'(x) = P_n'(x) + a_{n-1}^{(n)} P_{n-1}'(x) + a_{n-2}^{(n)} P_{n-2}'(x) + \cdots + a_1^{(n)} P_1'(x)$$

und wegen (46.) und (67.):

$$(69.) \quad |a_{n-1}^{(n)}|\,|P_{n-1}'(x)| + |a_{n-2}^{(n)}|\,|P_{n-2}'(x)| + \cdots + |a_1^{(n)}|\,|P_1'(x)| < \frac{1}{|t|^n} G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}$$

für alle x in $\bar{A}_r$. Aus (67.), (68.), (69.) folgt schließlich für alle x in $\bar{A}_r$:

$$T_n'(x) = P_n'(x)\left(1 + G \cdot \vartheta(x)\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}\right)$$

$$(70.) \qquad = \frac{-n}{t^{n+1}\psi'(t)}\left(1 + G_1 \vartheta_1(x)\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}\right).$$

Für alle x des größeren Gebietes $\bar{A}_{r+\eta}$ gilt (70.) ebenfalls, nur ist der Faktor $\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{3}}$ durch α^n mit $\alpha < 1$ zu ersetzen (vgl. (54.)).

Aus dem Bewiesenen folgt beispielsweise:

$$(71.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{T_{n+1}(x)}{T_n(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{T_{n+1}'(x)}{T_n'(x)} = \frac{1}{t}$$

gleichmäßig für alle x in $\bar{A}_{r+\eta}$.

Die entsprechenden Sätze für die höheren Ableitungen $T_n''(x), T_n'''(x) \ldots$ werden genau so bewiesen.

6. Reihen $\Sigma a_\nu T_\nu(x)$. Entwicklung von Funktionen in solche Reihen.

Nach (55.) ist

$$(72.) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|T_n(x)|} = \frac{1}{\varrho}$$

gleichmäßig für alle x auf C_ϱ ($\varrho < r + \eta$). Daher konvergiert jede Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu T_\nu(x)$, für welche

$$(73.) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho \; (< r + \eta)$$

ist, gleichmäßig in I_ϱ und divergiert in A_ϱ. In irgend einem Punkte x von C_ϱ findet Konvergenz oder Divergenz statt, je nachdem in dem entsprechenden Punkte t von K_ϱ die Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu t^{-\nu}$ konvergiert oder divergiert. Die Richtigkeit der letzten Behauptung folgt unmittelbar aus der Abschätzung (55.). Diese besagt aber noch mehr: Führt man wieder die Veränderliche t ein, so wird

$$(74.) \qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu t^{-\nu} + \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \lambda_\nu(t);$$

der zweite Summand auf der rechten Seite von (74.) konvergiert gleichmäßig für $\varrho\alpha < |t|$; dies folgt wieder unmittelbar aus (55.). Durch Rückkehr zur Veränderlichen x gewinnt man also in diesem zweiten Summanden eine Funktion, die zwischen $C_{a\varrho}$ und $C_{r'}$ regulär ist, während der erste Summand $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu t^{-\nu}$ als Funktion von x aufgefaßt sicher zwischen C_ϱ und $C_{r'}$ regulär ist, d. h. aber: den sämtlichen auf C_ϱ und zwischen $C_{a\varrho}$ und C_ϱ gelegenen singulären Stellen x der in I_ϱ konvergenten Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x)$ $\left(\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho\ (< r+\eta)\right)$ sind, durch die Substitution $x = \psi(t)$ eindeutig umkehrbar, die auf dem Kreise K_ϱ: $|t| = \varrho$ und in dem Kreisring $\alpha\varrho < |t| < \varrho$ gelegenen singulären Stellen der Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu t^{-\nu}$ (mit den nämlichen Koeffizienten a_ν) zugeordnet, derart, daß stets Singularitäten der nämlichen Art einander entsprechen, Pole wieder Polen gleicher Ordnung, ebenso Verzweigungsstellen oder wesentlich singuläre Stellen wieder solchen usw.

Zugleich ergibt sich, daß auf der Konvergenzgrenze der Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x)$ (wo $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < r+\eta$) immer mindestens eine singuläre Stelle der durch diese Reihe dargestellten Funktion liegt.

Es sei nun umgekehrt eine in C_ϱ $(\varrho < r+\eta)$ reguläre Funktion $F(x)$ gegeben und sie soll in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x)$ entwickelt werden. Ich entwickele zu diesem Zwecke $F(x)$ zuerst in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} k_\nu P_\nu(x)$, die in I_ϱ konvergiert; dies ist immer und nur auf eine Weise möglich, und es ist $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} \leqq \varrho$, wo das Zeichen $<$ nur dann gilt, wenn $F(x)$ auch auf C_ϱ regulär ist. Ersetzt man in dieser Entwicklung $P_\nu(x)$ aus (56.) durch $T_1(x)$, $T_2(x) \ldots T_\nu(x)$, so erhält man:

$$(75.) \quad F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} k_\nu \left(T_\nu(x) + b_{\nu-1}^{(\nu)} T_{\nu-1}(x) + \cdots + b_1^{(\nu)} T_1(x) + b_0^{(\nu)}\right).$$

Aus (55.) und (66.) folgt leicht für alle $x = \psi(t)$ auf $C_{\varrho'}$, falls nur $\varrho' < r+\eta$ und $\eta > 0$ hinreichend klein ist (vgl. die ganz ähnlichen Überlegungen, die zu (48.) und (50.) führten):

$$|T_n(x)| + |b_{n-1}^{(n)} T_{n-1}(x)| + \cdots + |b_1^{(n)} T_1(x)| + |b_0^{(n)}| < \frac{L}{|t|^n},$$

wo L eine von x und n unabhängige Schranke bedeutet. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} |k_\nu| \, (|T_\nu(x)| + |b_{\nu-1}^{(\nu)} T_{\nu-1}(x)| + |b_{\nu-2}^{(\nu)} T_{\nu-2}(x)| + \cdots + |b_1^{(\nu)} T_1(x)| + |b_0^{(\nu)}|)$$

in I_ϱ, und es kann mithin $F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} k_\nu P_\nu(x)$ in eine in I_ϱ konvergente Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x)$ umgeformt werden. Wenn $F(x)$ auch auf C_ϱ regulär ist, so konvergiert nach dem vorigen diese Reihe ganz von selbst innerhalb jedes Gebietes $I_{\varrho''}$, in welchem keine singuläre Stelle von $F(x)$ liegt, und divergiert in $A_{\varrho''}$, falls auf $C_{\varrho''}$ eine solche singuläre Stelle liegt.

Es werde noch bewiesen, daß eine in I_ϱ reguläre Funktion $F(x)$ nur auf *eine* Weise daselbst durch eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu T_\nu(x)$ dargestellt werden kann, falls nur $\varrho \leqq r$; statt $\varrho \leqq r$ dürfte man, wie ohne weiteres ersichtlich, auch $\varrho \leqq r + \eta$, voraussetzen, sofern nur $\eta > 0$ genügend klein gewählt wurde. Die Behauptung läßt sich auch so fassen, daß aus der Identität

$$(76^a.) \qquad 0 \equiv \sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu T_\nu(x) \text{ mit } \overline{\lim} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq r$$

folgt

$$(76^b.) \qquad c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_\nu = \cdots = 0.$$

Daß eine Darstellung der Null durch eine *endliche* Reihe (76ª.) mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten unmöglich ist, bedarf keines Beweises.

Angenommen also, es würde eine *unendliche* Reihe (76ª.) existieren, deren Summe identisch Null wäre, während von den Koeffizienten c_ν unendlich viele nicht gleich Null wären; dann könnte man mit genau den nämlichen Überlegungen, wie sie oben angestellt worden sind, (76ª.) in eine Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} k_\nu P_\nu(x)$ umordnen, und es müßte $k_\nu = 0$ sein ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$), da ja eine Funktion nur auf eine Weise in eine P-Funktionen-Reihe entwickelt werden kann, d. h. man hätte mit Benutzung von (56.) die Gleichungen:

$$(77.) \qquad c_\nu + c_{\nu+1} b_\nu^{(\nu+1)} + c_{\nu+2} b_\nu^{(\nu+2)} + \cdots = 0.$$

Nun ist nach Voraussetzung für genügend großes n und genügend kleines ε:

$$(78.) \qquad |c_{n+k}| < (\varrho + \varepsilon)^{n+k} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

und auf Grund von (66.):

(79.) $|b_n^{(n+k)}| < \frac{\varkappa^{n+k}}{r^k}$ mit $0 < \varkappa < 1$, oder auch nach passender Wahl von λ:

$$< \frac{\lambda^{n+k}}{(\varrho+\varepsilon)^k}(1-\lambda) \text{ mit } 0 < \lambda < 1.$$

Aus (77.), (78.), (79.) folgt

(80.) $$|c_n| < (\varrho+\varepsilon)^n \lambda^n$$

und ebenso für alle größeren Werte n:

(81.) $$|c_{n+k}| < (\varrho+\varepsilon)^{n+k} \lambda^{n+k} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

Benutzt man bei dem Schlusse, der zu (80.) führte, (81.) an Stelle von (78.), so erhält man

(82.) $$|c_n| < (\varrho+\varepsilon)^n \lambda^{2n}$$

und allgemein

(83.) $$|c_{n+k}| < (\varrho+\varepsilon)^{n+k} (\lambda^2)^{n+k}$$

und so fortschließend für beliebiges $m > 0$

(84.) $$|c_{n+k}| < (\varrho+\varepsilon)^{n+k} (\lambda^m)^{n+k},$$

d. h. aber

(85.) $$|c_{n+k}| = 0 \text{ für } k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Die Reihe (76.) wäre somit endlich, was von vornherein für unmöglich erkannt wurde.

Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu T_\nu(x)$, wo $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} > r'$ ist, werden im allgemeinen kein zusammenhängendes Konvergenzgebiet mehr haben und können in den verschiedenen Gebieten, in welchen sie konvergieren, unter anderm auch die Null darstellen. Beispiel: Für die Kurven $|x^2-1| = \text{Const.}$, wo Const. > 1, ist $T_{2\nu}(x) = (x^2-1)^\nu$ (vgl. (17.)) und $T_1(x) = x$; die Reihe $T_1(x) + \sum_0^\infty{}_\nu \binom{\frac{1}{2}}{\nu} T_{2\nu}(x) = x + \sqrt{1+(x^2-1)}$ konvergiert in den beiden Innengebieten der Lemniskate $|x^2-1| = 1$ nach verschiedenen Funktionen, nämlich nach $2x$ in dem Blatte, welches den Punkt $+1$ enthält, nach 0 in dem andern Blatte.

7. Die Nullstellen der Funktionen $T_\nu(x)$, $T_\nu'(x)$.... Interpolation an diesen Nullstellen.

Nach (72.) ist gleichmäßig für jedes x in $A_{r+\eta}$: $\lim\sqrt[n]{|T_n(x)|} = \frac{1}{|t|}$; die Nullstellen sämtlicher Funktionen $T_n(x)$ für $n > n'$ liegen also in $I_{r+\eta}$. Das gleiche gilt von den Nullstellen der Ableitungen $T_n'(x)$, $T_n''(x)$....

Es soll nun als Gegenstück zu den im vorigen Paragraphen behandelten Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\, T_\nu(x)$ folgende Frage erledigt werden:

$F(x)$ sei eine in I_ϱ $(\varrho < r+\eta)$ reguläre Funktion mit mindestens einer singulären Stelle auf C_ϱ. (Im Grenzfalle $\varrho = 0$ kann C_ϱ zum Punkte ∞ ausarten, $F(x)$ ist dann eine ganze Funktion.) Man bilde an den Nullstellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ von $T_n(x)$ als Interpolationsstellen nach der *Lagrange*schen Interpolationsformel das Polynom $(n-1)$-ten Grades:

$$(86.) \qquad L_n(x) = \sum_1^n{}_i \frac{T_n(x)}{(x-x_i^{(n)})\, T_n'(x_i^{(n)})} \cdot F(x_i^{(n)})$$

(bei etwaigem Zusammenfallen von Nullstellen der Funktion $T_n(x)$ ist dieses Polynom in bekannter Weise, etwa durch Grenzübergang, abzuändern). Die Frage ist: Besteht die Gleichung:

$$(87.) \qquad \lim_{n=\infty} L_n(x) = F(x)\,?$$

Die Antwort lautet:

Gleichung (87.) gilt für jedes x in I_ϱ und gleichmäßig für alle x in $\bar{I}_{\varrho'}$, falls $\varrho' > \varrho$; dagegen ist für alle x in A_ϱ:

$$(88.) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\, L_n(x) = \infty.$$

Zum Beweise bilde ich $L_n(x)$ für die besondere Funktion $\frac{1}{z-x}$, wobei x in $I_{\varrho'}$, z auf $C_{\varrho''}$ liegen und die Ungleichungen $r' > \varrho' > \varrho'' > \varrho$ bestehen mögen (ich schreibe zum Unterschied von (86.) $[L_n(x)]$):

$$(89.) \quad [L_n(x)] = \frac{1}{z-x_1^{(n)}} + \frac{x-x_1^{(n)}}{(z-x_1^{(n)})(z-x_2^{(n)})} + \frac{(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})}{(z-x_1^{(n)})(z-x_2^{(n)})(z-x_3^{(n)})} + \cdots + \frac{(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})\cdots(x-x_{n-1}^{(n)})}{(z-x_1^{(n)})(z-x_2^{(n)})\cdots(z-x_n^{(n)})},$$

und es ist:

$$(90.) \qquad \frac{1}{z-x} - [L_n(x)] = \frac{(x-x_1^{(n)})\cdots(x-x_n^{(n)})}{(z-x_1^{(n)})\cdots(z-x_n^{(n)})} \cdot \frac{1}{z-x} = \frac{T_n(x)}{T_n(z)} \frac{1}{z-x}.$$

Aus den Darstellungen (89.) und (90.) geht hervor: $[L_n(x)]$ hat, als Funktion von z aufgefaßt, Pole bei $z = x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ mit den Residuen $\frac{T_n(x)}{(x-x_i^{(n)})\, T_n'(x_i^{(n)})}$. Nach dem *Cauchy*schen Integralsatze ist daher:

$$(91.)\quad F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\varrho''}}\frac{F(z)}{z-x}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\varrho''}}[L_n(x)]\,F(z)\,dz+\frac{T_n(x)}{2\pi i}\int_{C_{\varrho''}}\frac{F(z)}{T_n(z)\,(z-x)}\,dz$$

$$=L_n(x)+\frac{T_n(x)}{2\pi i}\int_{C_{\varrho''}}\frac{F(z)}{T_n(z)\,(z-x)}\,dz.$$

Wenn also mit M das Maximum von $F(z)$ auf $C_{\varrho''}$, mit L die Länge dieser Kurve, mit d das Minimum der Entfernung eines Punktes von $C_{\varrho'}$ und eines von $C_{\varrho''}$, mit G (wie immer) eine von n und x unabhängige Schranke bezeichnet wird, so ergibt sich auf Grund von (72.):

$$(92.)\qquad |F(x)-L_n(x)|<\frac{M\cdot L}{2\pi d}\left(\frac{\varrho''}{\varrho'}\right)^n G,$$

also wegen $\varrho''<\varrho'$ beliebig klein für genügend großes n. Damit ist der auf die Konvergenz bezügliche Teil der Behauptung bewiesen. Beim Beweise des Divergenzsatzes (88.) hat man $\varrho>0$ und x in A_ϱ, etwa auf C_σ $(\sigma<\varrho)$ vorauszusetzen; auf der linken Seite von (91.) steht dann Null an Stelle von $F(x)$, und man erhält so:

$$(93.)\qquad |L_n(x)|=\frac{|T_n(x)|}{2\pi}\left|\int_{C_{\varrho''}}\frac{F(z)\,dz}{(z-x)\,T_n(z)}\right|.$$

Um das zuletzt erhaltene Integral abzuschätzen, führe man wieder durch $z=\psi(\tau)$ die Veränderliche τ ein; dadurch wird:

$$(94.)\quad \frac{1}{T_n(z)}=\tau^n+u_{n+1}\tau^{n+1}+u_{n+2}\tau^{n+2}+\cdots\quad(|\tau|<r+\eta)$$

$$=\tau^n+\mathfrak{p}_n(\tau).$$

Nach (55.) ist für $|\tau|=\varrho''$:

$$(95.)\qquad |\mathfrak{p}_n(\tau)|<(\varrho'')^n\alpha^n G \text{ mit } \alpha<1.$$

Aus $\int_{C_{\varrho''}}\frac{F(z)\,dz}{(z-x)\,T_n(z)}$ wird

$$(96.)\quad \int_{K_{\varrho''}}\frac{F(\psi(\tau))\,\psi'(\tau)\,d\tau}{(\psi(\tau)-x)\,T_n(\psi(\tau))}=\int_{K_{\varrho''}}\frac{F(\psi(\tau))\,\tau^n\,\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)-x}+\int_{K_{\varrho''}}\frac{F(\psi(\tau))\,\mathfrak{p}_n(\tau)\,\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)-x}.$$

Vermöge (95.) wird der zweite Summand auf der rechten Seite von (96.) für $n>n'$ dem Betrage nach

$$(97.)\qquad \begin{aligned}&<(\varrho'')^n\beta^n \text{ mit } \beta<1, \text{ also auch}\\ &<\varrho^n\gamma^n \text{ mit } \gamma<1,\end{aligned}$$

falls nur ϱ'' nahe genug an ϱ gewählt wurde; der erste Summand auf

der rechten Seite von (96.) ist der Koeffizient h_{n+1} von $\frac{1}{t^{n+1}}$ in der Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{h_\nu}{t^\nu} + \sum_0^\infty{}^\nu k_\nu t^\nu$ für $\frac{F(\psi(t))\cdot\psi'(t)}{\psi(t)-x}$; diese Reihe konvergiert in dem Kreisring $\varrho < |t| < r'$, und da $F(\psi(\tau))$ nach Voraussetzung auf dem Kreise $|\tau| = \varrho$ eine singuläre Stelle hat, ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|h_n|} = \varrho. \tag{98.}$$

Aus (96.), (97.), (98.) folgt, daß für jedes noch so kleine ε $(>0, <\varrho)$ und für unendlich viele Werte von n:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho} \frac{F(z)\,dz}{(z-x)\,T_n(z)} \right| > (\varrho-\varepsilon)^n \tag{99.}$$

wird. Da andrerseits, falls, wie angenommen wurde, x auf C_σ liegt, für jedes n $|T_n(x)| > G\sigma^{-n}$ ist (s. (55.)), und da $\sigma < \varrho$, also bei passender Wahl von ε auch $< \varrho - \varepsilon$ ist, folgt für die Werte von n, für welche (99.) gilt:

$$|L_n(x)| > A^n \text{ mit } A > 1. \tag{100.}$$

Daß nicht nur $\overline{\lim_{n=\infty}} L_n(x) = \infty$, sondern sogar $\lim_{n=\infty} L_n(x) = \infty$ würde, ist natürlich ebensowenig zu erwarten, wie beispielsweise, daß bei der Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für jedes x außerhalb ihres Konvergenzkreises $\lim_{n=\infty} |s_n(x)| = \lim_{n=\infty} |a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n| = \infty$ würde; so wird z. B. für die Reihe $2 - 2x + 2^3 x^2 - 2^3 x^3 + 2^5 x^4 - 2^5 x^5 + - \cdots$ für $x = 1$ und jedes n: $s_{2n+1} = 0$.

Genau, wie soeben geschehen, beweist man die entsprechenden Konvergenz- und Divergenzsätze, wenn es sich um die Interpolation von $F(x)$ an den Nullstellen von $T_n'(x)$ oder $T_n''(x)$ usw. handelt.

8. Andere Polynome mit Minimaleigenschaften.

Die am Ende der Einleitung eingeführten Polynome

$$R_n(x) = x^n + r_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + r_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \cdots + r_1^{(n)} x + r_0^{(n)} \tag{4.}$$

mit Nullstellen ausschließlich in I_r und mit einem möglichst großen Minimum des Betrags auf C_r gestatten folgende Entwicklung:

$$\frac{1}{R_n(x)} = t^n + v_{n+1}^{(n)} t^{n+1} + v_{n+2}^{(n)} t^{n+2} + \cdots, \quad |t| < r + \eta_n;\ (\eta_n > 0). \tag{101.}$$

Wegen der definierenden Eigenschaft von $R_n(x)$ ist

$$\operatorname*{Max}_{C_r} \frac{1}{|R_n(x)|} \leqq \operatorname*{Max}_{C_r} \frac{1}{|P_n(x)|}, \tag{102.}$$

also wegen (31.):

$$\text{(103.)} \qquad \operatorname*{Max}_{c_\nu} \frac{1}{|R_n(x)|^2} < r^{2n}\left(1 + G\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right).$$

Andrerseits folgt aus (101.):

$$\text{(104.)} \qquad \operatorname*{Max}_{c_\nu} \frac{1}{|R_n(x)|^2} > r^{2n}\,(1 + |v_{n+k}^{(n)}|^2\, r^{2k});$$

es ergibt sich also aus (103.), (104.):

$$\text{(105.)} \qquad |v_{n+k}^{(n)}| < r^{-k}\, G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Im Kreise $|t| < r'$ gilt die Entwicklung:

$$\text{(106.)} \qquad R_n(x) = \frac{1}{t^n} + c_{n-1}^{(n)} \frac{1}{t^{n-1}} + \cdots c_1^{(n)} \frac{1}{t} + c_0^{(n)} + c_{-1}^{(n)}\, t + \cdots;$$

die Koeffizienten $c_{n-1}^{(n)}$, $c_{n-2}^{(n)}$, $\ldots$ $c_0^{(n)}$ treten auch auf in der Darstellung:

$$\text{(107.)} \qquad R_n(x) = P_n(x) + c_{n-1}^{(n)}\, P_{n-1}(x) + \cdots + c_1^{(n)}\, P_1(x) + c_0^{(n)}.$$

Zu der auf der rechten Seite von (106.) stehenden Potenzreihe erhält man, indem man in (101.) $v_{n+k}^{(n)}$ durch $-\,r^{-k}\, G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}}$ ersetzt und danach den reziproken Wert von (101.) bildet, folgende Majorante:

$$\text{(108.)} \qquad \left(t^n - t^n G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{t}{r}\right)^\nu\right)^{-1} = \frac{1}{r\,t^n} \frac{r - t}{1 - \dfrac{t\left(1 + G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}}\right)}{r}}$$

$$= \frac{1}{t^n} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{t^{-n+\nu}}{r^\nu}\, r\, G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \left[1 + G\left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\nu-1},$$

d. h. aber, mit erlaubter Abänderung der Bedeutung von G (da ja die $(\nu-1)$-te Potenz auf der rechten Seite von (108.) für alle n und für $\nu = 1, \ldots (n-1)$, n unter einer endlichen Schranke bleibt):

$$\text{(109.)} \qquad |c_{n-\nu}^{(n)}| < G\, r^{-\nu} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{für } \nu = 1, \ldots (n-1), n.$$

Diese Ungleichung entspricht völlig der Ungleichung (46.) des 5. Abschnitts. Nun wurden aber sämtliche im 5., 6. und 7. Abschnitt abgeleiteten Sätze über die Polynome $T_n(x)$ einzig und allein aus jener Ungleichung (46.) gefolgert. Diese Sätze bleiben also ohne die geringste Änderung weder des Wortlautes noch der Beweise gültig, wenn man überall $R_n(x)$ an Stelle von $T_n(x)$ setzt.

Genau so kann man, wie sofort gezeigt werden soll, überall $T_n(x)$ durch $S_n(x)$ ersetzen, wo $S_n(x)$ die in der Einleitung eingeführte Funktion

(5.) $$S_n(x) = x^n + s_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + s_1^{(n)} x + s_0^{(n)}$$

bedeutet, deren sämtliche Nullstellen in I_r liegen und deren Schwankung des absoluten Betrags auf C_r möglichst klein ausfällt.

Da

(110.) $$S_n(x) = P_n(x) + h_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \cdots + h_1^{(n)} P_1(x) + h_0^{(n)},$$

folgt, wie S. 88 für $T_n(x)$ abgeleitet wurde:

(111.) $$\operatorname*{Max}_{C_r} |S_n(x)| > \frac{1}{r^n}.$$

Andererseits ist die Schwankung von $|P_n(x)|$ auf $C_r < \left(\frac{r}{r'}\right)^n G$, also auch

(112ª.) $$\operatorname*{Min}_{C_r} |S_n(x)| > \frac{1}{r^n} - G\left(\frac{r}{r'}\right)^n, \text{ oder}$$

(112ᵇ.) $$\operatorname*{Max}_{C_r} \frac{1}{|S_n(x)|^2} < r^{2n}\left(1 + G\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right).$$

Nun gilt für $\frac{1}{S_n(x)}$ eine Entwicklung genau wie (101.) und aus (112ᵇ.) folgt die (109.) entsprechende Koeffizientenungleichung. Von da ab bleiben die Schlüsse die gleichen wie zuvor, und man hat also auch hier das Ergebnis, daß sämtliche im 5., 6., 7. Abschnitt für $T_n(x)$ abgeleiteten Sätze unverändert für $S_n(x)$ gelten.

Im Falle der Ellipse schließt man, daß die $R_n(x)$ mit den $T_n(x)$ identisch sind, durch Wiederholung der Schlüsse von S. 85 mit $\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4n}$. Als Minimum von $|R_n(x)|$ auf der Ellipse $\xi = \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta$, $\eta = \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta$ ergibt sich so $\frac{1}{\varrho^n} - \varrho^n$, während das Minimum des absoluten Betrags jeder andern Funktion $Q_n(x)$ der Form (2.) kleiner ausfällt. Gilt aber, wie im Falle der Ellipse $R_n(x) \equiv T_n(x)$, so ist offenbar auch $S_n(x)$ ein drittes Glied der Identität. Für die angegebene Ellipse wird die minimale Schwankung von $S_n(x)$ gleich $2\varrho^n$.

Die Gleichungen $|P_n(x)| = \frac{1}{r^n}$, $|T_n(x)| = \frac{1}{r^n}$, $|R_n(x)| = \frac{1}{r^n}$, $|S_n(x)| = \frac{1}{r^n}$ stellen in der $x = \xi + i\eta$ Ebene (verallgemeinerte) Lemniskaten dar, welche für unendlich wachsendes n der Kurve C_r beliebig nahe verlaufen. Es lassen sich noch unendlich viele andere derartige Näherungslemniskaten

finden; man vgl. beispielsweise die von mir Math. Ann. 57, S. 397 und 63, S. 120 eingeführten Funktionen $\Pi_n(x)$ und $p_n(x)$.

Die in gewissem Sinne beste Näherung liefert ihrer Definition nach die Kurve $|S_n(x)| = C$ bei passender Wahl von C (nahe bei $\frac{1}{r^n}$). Zu einer im allgemeinen davon verschiedenen Annäherungslemniskate $|G_n(x)| = \text{Const.}$, die in einem andern Sinne als die beste angesehen werden kann, gelangt man folgendermaßen: $G_n(x)$ habe die Form $x^n + g_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + g_1^{(n)} x + g_0^{(n)}$ und besitze in A_r keine Nullstelle; sucht man die kürzeste Entfernung jedes Punktes der Lemniskate $|G_n(x)| = \text{Const.}$ von C_r und ist d_n die größte dieser Entfernungen, so soll die Definition von $G_n(x)$ durch die Bedingung, daß d_n möglichst klein sein soll, vervollständigt werden.

Es ist leicht einzusehen, daß für die Lemniskaten $|P_n(x)| = \frac{1}{r^n}$ die Abstandszahlen $d_n < G\left(\frac{r}{r'}\right)^n$ werden (ähnliche Abschätzungen gelten für die Lemniskaten $|T_n(x)| = \frac{1}{r^n}$, $|R_n(x)| = \frac{1}{r^n}$, $|S_n(x)| = \frac{1}{r^n}$); für die Lemniskaten $|G_n(x)| = \text{Const.}$ ist also sicher ebenfalls $d_n < G\left(\frac{r}{r'}\right)^n$, daraus folgt, daß diese Lemniskaten zwischen C_ϱ und C_σ verlaufen, wo $\varrho = r\left(1 - G\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right)$, $\sigma = r\left(1 + G\left(\frac{r}{r'}\right)^n\right)$. Weiter ergibt sich die auf der rechten Seite dieser Lemniskatengleichung stehende Const. $= \frac{1}{r^n}\left(1 + \Theta G \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n\right)$ mit $|\Theta| < 1$, und endlich erhält man durch Vergleichung der konformen Abbildungen (8.) $x = \psi(t)$ und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{G_n(x)}} = t$ Koeffizientenbeziehungen für $G_n(x)$, aus denen sich die Gültigkeit der Sätze des 5., 6., 7. Abschnitts auch auf die Polynome $G_n(x)$ ausdehnen läßt. Auf die nähere Ausführung der Beweise verzichte ich; sie bietet keine besondere Schwierigkeit, würde aber einige Weitläufigkeiten verursachen.

Es wäre erwünscht, einen einfachen, von der konformen Abbildung unabhängigen Beweis für den Satz zu finden, daß jede geschlossene doppelpunktslose Kurve C durch eine Lemniskate $|W_n(x)| = \text{Const.}\left(= \frac{1}{r^n}\right)$, wobei die Nullstellen des Polynoms $W_n(x) = x^n + w_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots w_0^{(n)}$ innerhalb oder auf C liegen, mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann. Dann

könnte man hinterher leicht den Hauptsatz der konformen Abbildung beweisen; durch $t = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{W_n(x)}} = \frac{1}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots$ wird nämlich das Äußere von C auf das Innere des Kreises $|t| = r$ der t-Ebene abgebildet; der Konvergenzbeweis würde keine Schwierigkeit machen. Durch den so gedachten Beweis der konformen Abbildung würde sich auch die vorliegende Abhandlung mehr zu einem geschlossenen Ganzen runden; die wirkliche Durchführung dieses Beweises aber dürfte weitläufig sein und müßte schließlich doch wohl in die Gedankengänge des *Robin*schen Verfahrens einmünden.

Die sämtlichen soeben definierten (in großer Mannigfaltigkeit vorhandenen) „Lemniskatenpolynome" $W_n(x)$, die zu einer Kurve C_r gehören, haben miteinander eine charakteristische Eigenschaft gemein, die schon bei den besonderen Lemniskatenpolynomen $T_n(x)$, $R_n(x)$, $S_n(x)$ angetroffen wurde: Bildet man für eine in $\bar{I}_r$ reguläre Funktion $F(x)$ mit den in $\bar{I}_r$ gelegenen Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)}$ als Interpolationsstellen die *Lagrange*sche Interpolationsformel $L_n(x)$ (vgl. (86.)), so ist

$$\lim_{n=\infty} L_n(x) = F(x) \text{ in } \bar{I}_r \tag{113.}$$

für jede in $\bar{I}_r$ reguläre Funktion $F(x)$ dann und nur dann, wenn die Funktionen $W_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)})$ ein System zur Kurve C_r gehöriger Lemniskatenpolynome bilden.

Der Beweis von (113.) wird für irgendein System von Lemniskatenpolynomen $W_n(x)$ genau so geführt, wie er oben für das besondere System der $T_n(x)$ geführt wurde. Bilden dagegen $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$ kein System von Lemniskatenpolynomen der Kurve C_r, so gibt es unendlich viele Indizes $n = n_1, n_2, \ldots$, für welche ein passend gewählter Punkt x von I_r außerhalb sämtlicher Lemniskaten mit den Gleichungen $|W_n(x)| = \frac{1}{r^n}$ liegt, während gleichzeitig ein passend gewählter Punkt z von A_r innerhalb der nämlichen Kurven liegt. Andernfalls würden nämlich für $n > n'$ die Kurven $|W_n(x)| = \frac{1}{r^n}$ in einem beliebig engen, um die Kurve C_r gezogenen Ringe verlaufen, wären also Näherungslemniskaten für C_r. Bildet man nun mit jenen Werten z und x die besondere Funktion $\frac{1}{z-x}$ und für sie die

*Lagrange*schen Interpolationsformeln $L_{n_k}(x)$ an den Nullstellen $x_i^{(n_k)}$ jener Polynome $W_{n_k}(x)$, so überzeugt ein Blick auf die Identität

$$\frac{1}{z-x} - L_{n_k}(x) = \frac{W_{n_k}(x)}{W_{n_k}(z)} \frac{1}{z-x},$$

die sich aus (90.) durch Buchstabenveränderung ergibt, daß Konvergenz nicht stattfindet; denn es ist stets $|W_{n_k}(x)| > |W_{n_k}(z)|$.

Der Fall, wo sämtliche Nullstellen $x_i^{(n)}$ der Lemniskatenpolynome $W_n(x)$ auf die Kurve C_r rücken, ist besonders erwähnenswert. Die infinitäre Verteilungsdichte dieser Nullstellen auf C_r, wobei in einem Punkte von C_r die Dichtezahl noch willkürlich vorgeschrieben werden darf, ist offenbar identisch mit der Dichte jener aus der Theorie des logarithmischen Potentials bekannten einfachen Belegung, welche bewirkt, daß C_r selbst eine Kurve gleichen Potentials wird. Daraus folgt, daß die Verteilungsdichte der Interpolationsstellen $x_i^{(n)}$ auf C_r jenem ganz bestimmten Gesetze folgen muß, wenn jede in $\bar{I}_r$ reguläre Funktion mit beliebiger Genauigkeit mittels der *Lagrange*schen Interpolationsformel dargestellt werden soll, und daß auch umgekehrt jede in $\bar{I}_r$ reguläre Funktion daselbst als Grenzwert $\lim_{n=\infty} L_n(x)$ der *Lagrange*schen Interpolationsformel dargestellt werden kann, wofern nur die Verteilungsdichte der Interpolationsstellen auf C_r sich für $\lim n = \infty$ jener ausgezeichneten Potentialbelegung unbegrenzt nähert. Die Konvergenz reicht dann immer bis zu jener Kurve C_σ $(\sigma < r)$, auf der eine singuläre Stelle von $F(x)$ liegt, wobei wieder unter C_0 der eine Punkt ∞ zu verstehen ist.

Schrumpft insbesondere I_r auf die doppelt zählende Strecke $(-2, +2)$ zusammen, so ist das Verteilungsgesetz der Interpolationsstellen auf dieser Strecke das nämliche wie das der Nullstellen des besonderen Lemniskatenpolynoms $T_n(x) = 2\cos n(\arccos x)$ für $\lim n = \infty$. Wenn man wieder $x = 2\cos\vartheta$ setzt, so ist die Verteilung auf der Strecke von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ eine gleichmäßige; wegen $d\vartheta = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$ ist daher die Verteilungsdichte auf der Strecke von $x = -2$ bis $x = +2$ zu $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$ proportional.

Dieses Ergebnis wurde auf anderem Wege zuerst von Herrn *Runge* gefunden; vgl. Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 46, S. 224 und Theorie und Praxis der Reihen (Leipzig) S. 140.

9. Polynome, welche eine gegebene Funktion in einem gegebenen Gebiet möglichst genau darstellen.

Zum Schlusse will ich auf die am Ende der Einleitung aufgeworfene Frage eingehen: $F(x)$ sei eine gegeben ein $\bar{I}_r$ reguläre Funktion, $K_n(x)$ sei das Polynom n-ten oder niedrigeren Grades, für welches $\varepsilon_n = \underset{C_r}{\text{Max}} |F(x) - K_n(x)|$ möglichst klein ausfällt. Wenn $F(x)$ selbst ein Polynom l-ten Grades ist, wird natürlich $K_n(x) \equiv F(x)$ für $n \geqq l$. Von diesem Falle soll im folgenden abgesehen werden.

Die Funktion $F(x)$ möge in I_ϱ $(\varrho < r)$ regulär sein und auf C_ϱ eine singuläre Stelle besitzen (der nicht ausgeschlossene Grenzfall $\varrho = 0$ besagt: $F(x)$ ist eine ganze Funktion). Dann gilt in I_ϱ die Entwicklung

$$F(x) = \sum_0^\infty{}' a_\nu P_\nu(x) \text{ mit} \tag{114.}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \varrho, \quad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{P_\nu(x)} = \frac{1}{r} \text{ für alle } x \text{ auf } C_r. \tag{115.}$$

Bezeichnet man also mit η_n das Maximum von $|F(x) - \sum_0^n{}' a_\nu P_\nu(x)|$ auf C_r, so ist

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\eta_n} = \frac{\varrho}{r}, \text{ mithin} \tag{116.}$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\varepsilon_n} \leqq \frac{\varrho}{r}. \tag{117.}$$

Andrerseits gestattet die Differenz $D_n(x) = F(x) - K_n(x)$ die Darstellung

$$D_n(x) = \sum_0^\infty{}' b_\nu^{(n)} P(x) \text{ und es ist} \tag{118.}$$

$$b_\nu^{(n)} = a_\nu \text{ für } \nu > n. \tag{119.}$$

Nun ist

$$|b_\nu^{(n)}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{K_r} D_n(\psi(\tau))\, \tau^{\nu-1}\, d\tau \right| \tag{120.}$$

$$< \varepsilon_n r^\nu, \text{ also}$$

$$\varepsilon_n > \frac{|a_n|}{r^{n+1}}, \tag{121.}$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\varepsilon_n} \geqq \frac{\varrho}{r}; \tag{122.}$$

aus (117.), (122.) folgt

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\varepsilon_n} = \frac{\varrho}{r}. \tag{123.}$$

Wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein gegeben ist, so folgt aus (120.), (123.) für hinreichend große Werte von n

$$|b_\nu^{(n)}| < \frac{\varrho^\nu}{r^{n-\nu}} (1+\varepsilon)^n. \tag{124.}$$

In der Darstellung

$$K_n(x) = c_n^{(n)} P_n(x) + c_{n-1}^{(n)} P_{n-1}(x) + \cdot\ \cdot + c_1^{(n)} P_1(x) + c_0^{(n)} \tag{125.}$$

ist

$$c_\nu^{(n)} = a_\nu - b_\nu^{(n)}, \text{ also} \tag{126.}$$

$$c_\nu^{(n)} = a_\nu + \Theta \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n (1+\varepsilon)^n r^\nu. \tag{127.}$$

Für genügend großes n und für alle x in $\bar{I}_\sigma$, wo $\sigma > \varrho$, d. h. also schließlich für alle x irgend eines ganz innerhalb I_ϱ gelegenen Gebietes I' wird demnach wegen (31.):

$$\left| \sum_0^n{}^\nu a_\nu P_\nu(x) - K_n(x) \right| < (n+1)(1+\varepsilon)^n \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n, \tag{128.}$$

und falls nur von vornherein ε klein genug gewählt wurde, konvergiert hier die rechte Seite mit $\frac{1}{n}$ gegen Null; d. h. aber es gilt gleichmäßig in I':

$$\lim_{n=\infty} K_n(x) = F(x). \tag{129.}$$

Ob andrerseits für jedes x in A_ϱ die Gleichung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |K_n(x)| = \infty \tag{130.}$$

besteht, vermochte ich nicht zu entscheiden.

Wenn man über die Art der Singularitäten von $F(x)$ auf C_r bestimmte Voraussetzungen macht, kann man sehr leicht zu viel genaueren Abschätzungen von ε_n gelangen.

Es habe beispielsweise $F(x)$ auf C_ϱ einen einzigen Pol erster Ordnung; dann hat die aus $F(x)$ durch die Substitution (8.) hervorgehende Funktion $F(\psi(\tau)) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{a_\nu}{t^\nu} + \sum_1^\infty{}^\nu b_\nu t^\nu$ $(\varrho < |t| < r')$ auf dem Kreise K_ϱ ebenfalls einen einzigen Pol erster Ordnung, und daraus folgt

$$|a_\nu| = B\varrho^\nu (1 + \vartheta G \alpha^\nu), \tag{131.}$$

wo α, B und G, wie nachher auch B_1, B_2, B_1' von ν unabhängige positive Zahlen sind, α und ebenso nachher β, γ außerdem < 1, während ϑ von ν

abhängt, aber dem Betrage nach <1 bleibt. Wegen (121.) ist also

$$\varepsilon_n > B_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n. \tag{132.}$$

Andrerseits ist

$$\varepsilon_n < \eta_n < \sum_n^\infty{}^{\nu} |a_\nu| \frac{1}{r^\nu}(1+\beta^\nu G_1) \quad \text{(wegen (31.))}$$

$$< \sum_n^\infty{}^{\nu} B_2 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\nu \quad \text{(wegen (31.))},$$

also

$$\varepsilon_n < B_1' \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n. \tag{133.}$$

Legt man den Näherungspolynomen für $F(x)$ noch die weitere Bedingung auf, daß sie genau vom Grade n sind und daß der Koeffizient von x^n gleich 1 ist — diese neuen Polynome mögen $\overline{K}_n(x)$ heißen — so wird, da ja $\underset{C_r}{\text{Max}} |\overline{K}_n(x)| \geqq \underset{C_r}{\text{Max}} |T_n(x)|$, in $\overline{I}_r$ nur dann die Gleichung $\lim_{n=\infty} \overline{K}_n(x) = F(x)$ gelten, wenn $r>1$ ist, und zwar wird dann Konvergenz jedenfalls in dem kleineren der beiden Gebiete I_1 und I_ϱ stattfinden, falls wieder $F(x)$ in I_ϱ, aber nicht in $\overline{I}$ regulär ist.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 150.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 15. Juni

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1920

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 30 Mark.

abhängt, aber dem Betrage nach <1 bleibt. Wegen (121.) ist also

$$\varepsilon_n > B_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n. \tag{132.}$$

Andrerseits ist

$$\varepsilon_n < \eta_n < \sum_n^\infty{}^{\nu} |a_\nu| \frac{1}{r^\nu} (1 + \beta^\nu G_1) \quad \text{(wegen (31.))}$$

$$< \sum_n^\infty{}^{\nu} B_2 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\nu \quad \text{(wegen (31.))},$$

also

$$\varepsilon_n < B_1' \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n. \tag{133.}$$

Legt man den Näherungspolynomen für $F(x)$ noch die weitere Bedingung auf, daß sie genau vom Grade n sind und daß der Koeffizient von x^n gleich 1 ist — diese neuen Polynome mögen $\overline{K}_n(x)$ heißen — so wird, da ja $\underset{C_r}{\text{Max}} |\overline{K}_n(x)| \geqq \underset{C_r}{\text{Max}} |T_n(x)|$, in $\overline{I}_r$ nur dann die Gleichung $\lim_{n=\infty} \overline{K}_n(x) = F(x)$ gelten, wenn $r > 1$ ist, und zwar wird dann Konvergenz jedenfalls in dem kleineren der beiden Gebiete I_1 und I_ϱ stattfinden, falls wieder $F(x)$ in I_ϱ, aber nicht in $\overline{I}$ regulär ist.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schlesinger, Schottky, Schwarz, Stäckel

von

K. Hensel.

Band 150.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 15. Juni

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1920

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 30 Mark

Band 150. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Lukács, Franz, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe . . . . . Seite 107

Olsson, Ol., Einige Anwendungen der hydrodynamischen Theorien von *Kirchhoff-Clebsch* . . . . . — 113

Rella, Tonio, Über die multiplikative Darstellung von algebraischen Zahlen eines *Galois*schen Zahlkörpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers . . . . . — 157

Czuber, E., Der Mittelwert eines Quotienten . . . . . — 175

Rosanes, J., Bemerkungen zu der Aufgabe, eine quadratische Form als Summe von Quadraten linearer Formen darzustellen . . . . . — 180

Bauer, Michael, Bemerkung über die Zusammensetzung der algebraischen Zahlkörper . . . . . — 185

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die fortdauernd steigenden Kosten für alle Materialien und Arbeitslöhne zwingen dazu, den Preis dieser Zeitschrift vom 150. Bande ab auf M. 30.— pro Band zu erhöhen. Verlag und Redaktion bitten die Leser, den unentweichlichen Verhältnissen Rechnung tragen zu wollen und der Zeitschrift treu zu bleiben.

An die Herren Mitarbeiter!

Der Mangel an Rohstoffen für die Papierfabrikation hat die Wirtschaftsstelle für die Papier verarbeitenden Gewerbe gezwungen, die Zuteilung von Papier für Druckwerke ganz erheblich einzuschränken und die Lieferung von Frei- und Werbeexemplaren von Zeitschriften und Zeitungen zu verbieten. So sieht sich der Verlag nicht mehr imstande, den Herren Mitarbeitern Sonderdrucke ihrer Beiträge in unbeschränkter Zahl zur Verfügung stellen zu können, er kann fortab jedem der Herren Verfasser bis auf weiteres nur noch die seither unberechnet zugestandenen 25 Separate liefern und bittet freundlichst, davon Kenntnis nehmen zu wollen.

In Hochachtung und Ergebenheit

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger

Walter de Gruyter & Co., Berlin W. 10

Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe.

Von *Franz Lukács* in Budapest*).

1. Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ integrierbare**) Funktion, die nach 2π periodisch ist. Man bilde ihre Fourierreihe

$$(F) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wo

$$(1.) \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt.\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt.\,dt, \ (n=0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Die *konjugierte Fourierreihe* ist dann

$$(F^*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Die n-ten Partialsummen von (F) und (F^*) bezeichne man bzw. mit $s_n(x)$ und $\sigma_n(x)$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Frage, die zuerst von Herrn *L. Fejér* in einer gleichbetitelten Arbeit (dieses Journal, Bd. 142 (1913), pag. 165—188) aufgeworfen und für eine ausgedehnte Klasse von Funktionen auch beantwortet wurde. Nach einem bekannten *Fejér*schen Satz konvergiert das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen von (F):

$$\frac{s_0 + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}$$

gegen

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

*) Verfasser ist am 30. XI. 1918 gestorben. Das Manuskript vorliegender Arbeit ist schon 1916 eingereicht worden.

**) „Integrierbar“ und „Integral“ sollen in dieser Arbeit stets *im Lebesgueschen Sinn* verstanden werden.

an jeder Stelle x, wo diese beiderseitigen Grenzwerte der Funktion, $f(x+0)$ und $f(x-0)$, existieren, d. h. wo die Funktion stetig ist oder eine „Diskontinuität erster Art" besitzt. Herr *Fejér* fragt nun: *Wie können diese Werte* $f(x+0)$ *und* $f(x-0)$ *selbst bestimmt werden?* Er bemerkt, daß dazu die Bestimmung des „Sprunges"

$$D_x = f(x+0) - f(x-0)$$

genügt, und gibt zur Bestimmung dieser Größe a. a. O. zwei Methoden. Erstens zeigt er, daß

$$D_x = \lim_{n=\infty} \left(s_n\left(x + \frac{g}{n}\right) - s_n\left(x - \frac{g}{n}\right)\right)$$

ist, wo g irgendeine positive Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\int_z^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = 0$$

bedeutet; zweitens, daß

$$D_x = \pi . \lim_{n=\infty} \left\{ \sigma_n(x) - \frac{\sigma_1(x) + \cdots + \sigma_n(x)}{n+1} \right\}$$

ist. Dabei wird aber die wesentliche Beschränkung benutzt, daß $f(x)$ *von beschränkter Schwankung sei**).

Ich kann nun die *Fejér*sche Frage ganz allgemein für *jede* integrierbare Funktion beantworten, und zwar durch den folgenden Satz:

A. *Die Funktion* $f(x)$ *sei im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *integrierbar und periodisch nach* 2π. *Existiert dann an der Stelle* x *der Grenzwert*

$$D_x = \lim_{h=+0} \left(f(x+h) - f(x-h)\right),$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(x)}{\log n} = \frac{D_x}{\pi}.$$

Hier bedeutet $\sigma_n(x)$ *die* n*-te Partialsumme der zur Fourierreihe von* $f(x)$ *konjugierten trigonometrischen Reihe.*

Mit diesem und dem *Fejér*schen Satze über die arithmetischen Mittel gelingt es also, $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gesondert zu bestimmen, ohne für $f(x)$ mehr vorauszusetzen, als die Existenz dieser zu berechnenden Werte.

---

*) A. a. O. führt Herr *Fejér* engere Voraussetzungen ein; die oben gegebene genügt aber, wie für die erste Methode von ihm selbst, für die zweite von Herrn *P. Csillag* bewiesen und mir mündlich mitgeteilt wurde.

Aus A. folgt übrigens unmittelbar, daß (*F**) an jeder Stelle *eigentlich divergiert*, wo die Funktion einen Sprung hat. Diese Tatsache hat Herr *A. Pringsheim* in seiner Arbeit: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise" (Sitzungsber. der Bayr. Akad., math.-phys. Kl., München 1900) bewiesen, die zuerst den Zusammenhang der Stetigkeitseigenschaften der Funktion mit den Konvergenzverhältnissen ihrer konjugierten Fourierreihe verfolgt hat.

Der *Lebesgue*schen Verallgemeinerung*) des *Fejér*schen Satzes über die arithmetischen Mittel der Fourierreihe analog kann Satz A folgendermaßen verallgemeinert werden:

B. *Existiert für eine Stelle x eine Zahl D_x derart, daß*

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x-t) - D_x|\, dt = 0$$

ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(x)}{\log n} = \frac{D_x}{\pi}.$$

Wie aus einem bekannten *Lebesgue*schen Satz**) sofort folgt, existiert diese Zahl D_x und ist $= 0$ überall, höchstens die Stellen einer Menge vom Maße Null ausgenommen; also:

C. *Für eine beliebige* (integrierbare) *Funktion ist — höchstens die Stellen einer Menge vom Maße Null ausgenommen — überall*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n(x)}{\log n} = 0.$$

2. Ich gehe nun zu den Beweisen über. Nach Formel (1.) ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \,.\, \big(\sin(t-x) + \sin 2(t-x) + \cdots + \sin n\,(t-x)\big).\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} f(t+x) \,.\, \big(\sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt\big).\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) \,.\, \big(\sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt\big).\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(f(x+t) - f(x-t)\big) \,.\, \big(\sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt\big).\, dt.
\end{aligned}$$

---

*) Sur la convergence des séries de Fourier, Math. Annalen Bd. 61.

**) Leçons sur l'intégration etc., Paris 1904, pag. 123—125, und Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906, pag. 13.

Nun ist

$$\sin t + \sin 2t + \cdots + \sin nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+{}^1/_2)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot(1-\cos nt) + \frac{1}{2}\sin nt,$$

also

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot(1-\cos nt).\,dt + \delta_n(x)^*),$$

wo wir

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

gesetzt haben und $\delta_n(x)$ nach dem *Riemann*schen Lemma gegen Null konvergiert; wir vereinfachen diesen Ausdruck noch folgendermaßen:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\,\frac{1-\cos nt}{t}\cdot dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t).\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right)(1-\cos nt).\,dt + \delta_n(x).$$

Hier ist das zweite Glied absolut genommen kleiner als

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\varphi(t)|\cdot\left|\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right|.\,dt,$$

eine Größe, die von n unabhängig ist; wir brauchen also für unsere Zwecke nur das erste Glied zu untersuchen. Da, wie leicht ersichtlich, wenn

$$\omega_n = \int_0^\pi \frac{1-\cos nt}{t}\,dt$$

gesetzt wird,

$$\lim_{n=\infty}\frac{\omega_n}{\log n} = 1$$

ist**), müssen wir — um A. zu beweisen — zeigen, daß

---

*) S. die angeführte Arbeit von *Pringsheim.*

**) Es ist nämlich

$$\omega_n = \int_0^{n\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \int_0^\pi \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

also wegen

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(1-\cos\alpha)\,d\alpha = \pi,$$

ist

$$\omega_n < \int_0^\pi \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi \varphi(t) \frac{1-\cos nt}{t}\, dt = D_x,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi (\varphi(t)-D_x) \frac{1-\cos nt}{t}\, dt = 0 \tag{2.}$$

ist, falls

$$\lim_{t=+0} (\varphi(t)-D_x) = 0$$

ist. Es sei nun ε eine beliebige positive Zahl; wir bestimmen $\delta > 0$ derart, daß

$$|\varphi(t) - D_x| < \varepsilon \text{ für } 0 < t \leqq \delta$$

ist. Dann ist

$$\left| \frac{1}{\omega_n} \int_0^\pi (\varphi(t) - D_x) \frac{1-\cos nt}{t}\, dt \right| \leqq \frac{1}{\omega_n} \int_0^\delta |\varphi(t)-D_x| \frac{1-\cos nt}{t}\, dt$$

$$+ \frac{1}{\omega_n} \int_\delta^\pi |\varphi(t)-D_x| \frac{1-\cos nt}{t}\, dt < \varepsilon + \frac{1}{\omega_n} \int_\delta^\pi |\varphi(t)-D_x| \frac{2}{\delta}\, dt;$$

das zweite Glied konvergiert hier für $n=\infty$ gegen Null, das erste ist die beliebige positive Größe ε, also besteht tatsächlich (2.).

3. Um B zu beweisen, müssen wir die Richtigkeit von (2.) unter der Voraussetzung erhärten, daß

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t) - D_x|\, dt = 0$$

ist. Wir setzen

$$\Phi(h) = \int_0^h |\varphi(t)-D_x| \,.\, dt;$$

zu der beliebigen positiven Zahl ε wählen wir nun $\delta > 0$ so, daß

$$\frac{\Phi(h)}{h} < \varepsilon \text{ für } 0 < h \leqq \delta$$

ist. Das Integral auf der linken Seite von (2.) zerlegen wir in drei Teile: $\int^{\pi/n}$, $\int_{\pi/n}^{\delta}$, $\int_{\delta}^{\pi}$. In dem ersten ist

---

$$\omega_n > \int_0^\pi \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n};$$

bekanntlich ist aber

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \backsim \log n,$$

also auch $\log n \backsim \omega_n$.

$$\frac{1-\cos nt}{t} = \frac{2\sin^2\frac{n}{2}t}{t} \leqq \frac{2\sin\frac{n}{2}t}{t} \leqq n,$$

also ist dieser Teil

$$\left|\int_0^{\pi/n}\right| \leqq n\int_0^{\pi/n} |\varphi(t)-D_x|\,dt = n\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi.\,\varepsilon. \tag{3.}$$

Für den zweiten erhalten wir

$$\left|\int_{\pi/n}^{\delta}\right| \leqq 2\int_{\pi/n}^{\delta} \frac{|\varphi(t)-D_x|}{t}\,dt,$$

und durch eine partielle Integration weiter

$$\leqq 2\left[\frac{\Phi(t)}{t}\right]_{\pi/n}^{\delta} + 2\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt$$

$$< 2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon\int_{\pi/n}^{\delta}\frac{dt}{t} = 2\,\varepsilon\,(1+\log\delta/\pi+\log n). \tag{4.}$$

Der dritte Teil ist

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}\right| \leqq \frac{2}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(t)-D_x|\,dt \leqq \frac{2}{\delta}\,\Phi(\pi). \tag{5.}$$

Zusammengefaßt gibt (3.), (4.) und (5.)

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_0^{\pi}(\varphi(t)-D_x)\,\frac{1-\cos nt}{t}\,dt\right| \leqq 2\,\varepsilon\cdot\frac{\log n}{\omega_n} + 2\,\varepsilon\,\frac{\pi/2+1+\log\delta/\pi}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n}\,\frac{2\,\Phi(\pi)}{\delta}.$$

Für $n=\infty$ ist der Grenzwert der rechten Seite (wegen $\log n \backsim \omega_n$) $= 2\,\varepsilon$; da ε eine beliebige Größe war, ergibt sich (2.).

Satz B. enthält natürlich A., ich hielt es aber für lohnend, den ganz einfachen Beweis für A. vorauszuschicken.

Einige Anwendungen der hydrodynamischen Theorien von *Kirchhoff-Clebsch.*

Von Herrn *Ol. Olsson* in Örebro (Schweden).

1. In ihrer umfassenden Arbeit *Natural Philosophy* zeigten *Thomson* und *Tait* die Anwendbarkeit *des Prinzips von Hamilton* auch bei der Behandlung von Fragen in der Hydrodynamik starrer Körper; *Kirchhoff* bewies dann die Fruchtbarkeit dieser Anregung, indem er neue elegante Formen der Differentialgleichungen der Bewegung starrer Körper in *idealen Flüssigkeiten* ableitete*) und sich dabei auf das erwähnte Prinzip stützte.

In seiner Abhandlung *Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit***) gab *Clebsch* diesen Bewegungsgleichungen eine andere, für die praktische Anwendung noch zweckmäßigere Form.

Diese Gleichungen will ich für das folgende zugrunde legen. Es handelt sich dabei um die Untersuchung von einigen Fällen der Bewegung starrer Körper in idealen Flüssigkeiten, unter der Voraussetzung, daß der Körper durch eine oder mehrere in demselben Augenblick wirkende Stoßkräfte in Bewegung gesetzt worden ist, aber daß nach dem Stoße keine äußeren Kräfte wirken. Ich werde einige besondere Fälle angeben, bei denen man von den Differentialgleichungen der Bewegung, außer den schon von *Kirchhoff* und *Clebsch* abgeleiteten Integralen, noch zwei neue erhalten kann, wenn man nur eine gewisse einschränkende Bedingung hinsichtlich der Bewegung des Körpers im Anfangsstadium als erfüllt voraussetzt, eine

*) Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, dieses Journal, Bd. 71 (1870).

**) Math. Annalen, Bd. 3 (1870).

Bedingung, der in vielen Fällen genügt werden kann. — Schränkt man die Freiheit der Anfangsbewegung noch durch eine weitere Bedingung ein, so kann man sogar in einigen Fällen die vollständige Lösung der Bewegungsprobleme durchführen.

Weil ich sie für die folgende Untersuchung brauche, will ich erst noch, hier in einer etwas veränderten Form, einige von mir*) früher abgeleitete gemeingültige Sätze anführen, die aus der *Kirchhoff-Clebsch*schen Theorie herfließen.

Diese Sätze sind von einem gewissen Interesse, da sie dazu dienen, den Bewegungsverlauf der Körper je nach ihren verschiedenen Formen und ihren verschiedenen Anfangsbedingungen in den Hauptzügen zu veranschaulichen.

A. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

2. Wir beziehen die einzelnen Teilchen des beweglichen Körpers teils auf ein in ihm festes, rechtwinkliges Koordinatensystem OX, OY, OZ, teils auf ein im Raume festes System $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ und bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten von O längs den Achsen OX, OY, OZ mit u, v, w und die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um diese Achsen mit p, q, r; endlich nennen wir die kinetische Energie des ganzen beweglichen Systems $2T$.

Wenn keine äußeren Kräfte auf den Körper oder die Flüssigkeit einwirken, sondern der Körper nur durch eine oder mehrere gleichzeitig wirkende Impulsivkräfte in Bewegung gesetzt worden ist, so nehmen die *Kirchhoff*schen Bewegungsgleichungen folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v};\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w};\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q};\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r};\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}. \end{aligned}\right\} \qquad (1_1.)$$

*) Über die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten, Archiv für Mathematik, Astronomie und Physik der K. Schwedischen Akademie der Wissensch., 1904, S. 548—552.

Diese Gleichungen haben die drei Integrale

$$\left.\begin{aligned} 2T &= l; \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 &= m^2; \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} &= n. \end{aligned}\right\} \qquad (1_2.)$$

Nach *Kirchhoff* hat man noch die folgenden sechs Integrale des vorliegenden Bewegungsproblems:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k_1; \\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k'; \\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w} &= k''; \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l_1 + k''H - k'Z; \\ \beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l' + k_1 Z - k''\Xi; \\ \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r} &= l'' + k'\Xi - k_1 H; \end{aligned}\right\} \qquad (2_1.)$$

($l, m, n, k_1, k', k'', l_1, l', l''$ Integrationskonstanten)

nebst den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dt} &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w; \\ \frac{dH}{dt} &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w; \\ \frac{dZ}{dt} &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w. \end{aligned}\right\} \qquad (3.)$$

Hier bezeichnen Ξ, H, Z die Koordinaten des Ursprungs O in dem Systeme $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ und α_ν, β_ν, γ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) die Richtungscosinus zwischen den Achsen der beiden Systeme $OXYZ$ und $o\xi\eta\zeta$.

Ohne die Allgemeinheit der Bewegung zu beeinträchtigen, kann man die beiden Integrationskonstanten k_1 und k' gleich Null setzen und k'' positiv annehmen; denn hierdurch trifft man nur Verfügungen über die Richtung der $o\zeta$-Achse. Demzufolge wird $m^2 = k''^2$, wie man durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (2.) findet. Also kann man $k'' = +m$ setzen, wenn unter $+m$ der positive Wert von $\sqrt{m^2}$ verstanden wird.

Ebenfalls kann man es erreichen, daß l_1 und l' verschwinden, wenn man in der $\xi\eta$-Ebene den Ursprung o des Koordinatensystemes $\xi\eta\zeta$ geeignet wählt.

Der in diesen Gleichungen auftretende Ausdruck der lebendigen Kraft $2T$ ist eine homogene Funktion zweiten Grades in den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, p, q, r:

$$\left.\begin{aligned} 2T = {} & c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + 2c_{13}uw + 2c_{14}up + 2c_{15}uq + 2c_{16}ur + \\ & + c_{22}v^2 + 2c_{23}vw + 2c_{24}vp + 2c_{25}vq + 2c_{26}vr + \\ & + c_{33}w^2 + 2c_{34}wp + 2c_{35}wq + 2c_{36}wr + \\ & + c_{44}p^2 + 2c_{45}pq + 2c_{46}pr + \\ & + c_{55}q^2 + 2c_{56}qr + \\ & + c_{66}r^2, \end{aligned}\right\} \qquad (4.)$$

wo die Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \ldots 6$) von der Form des Körpers, seiner Masse und deren Verteilung und von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängen.

3. Wenn man jetzt durch die Definitionsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial T}{\partial u}; & y_1 &= \frac{\partial T}{\partial p}; \\ x_2 &= \frac{\partial T}{\partial v}; & y_2 &= \frac{\partial T}{\partial q}; \\ x_3 &= \frac{\partial T}{\partial w}; & y_3 &= \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.)$$

woraus man folgert, daß

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial T}{\partial x_1}; & p &= \frac{\partial T}{\partial y_1}; \\ v &= \frac{\partial T}{\partial x_2}; & q &= \frac{\partial T}{\partial y_2}; \\ w &= \frac{\partial T}{\partial x_3}; & r &= \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{aligned}\right\} \qquad (5_1.)$$

ist, die *Clebsch*schen Variabeln x_ν, y_ν einführt, so kann man $2T$ nach (4.) und (5.) als eine homogene quadratische Funktion von x_ν, y_ν schreiben:

$$\left.\begin{aligned} 2T = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1y_1 + 2a_{15}x_1y_2 + 2a_{16}x_1y_3 + \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2y_1 + 2a_{25}x_2y_2 + 2a_{26}x_2y_3 + \\ & + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3y_1 + 2a_{35}x_3y_2 + 2a_{36}x_3y_3 + \\ & + a_{44}y_1^2 + 2a_{45}y_1y_2 + 2a_{46}y_1y_3 + \\ & + a_{55}y_2^2 + 2a_{56}y_2y_3 + \\ & + a_{66}y_3^2, \end{aligned}\right\} \qquad (5_2.)$$

wo die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ aus den Konstanten $c_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots 6)$ zusammengesetzt sind.

Die vorigen Bewegungsgleichungen und Integrale nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= -x_\beta \frac{\partial T}{\partial y_\gamma} + x_\gamma \frac{\partial T}{\partial y_\beta}; \\ \frac{dy_\alpha}{dt} &= -x_\beta \frac{\partial T}{\partial x_\gamma} + x_\gamma \frac{\partial T}{\partial x_\beta} - y_\beta \frac{\partial T}{\partial y_\gamma} + y_\gamma \frac{\partial T}{\partial y_\beta}; \\ & \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \quad (6.)$$

$$\left.\begin{aligned} 2T &= l; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= m^2; \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= n; \end{aligned}\right\} \quad (6_1.)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0; \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 &= 0; \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 &= m. \end{aligned}\right\} \quad (7.)$$

Wenn man die Gleichungen (7.) mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bzw. mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bzw. mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ multipliziert und dann addiert, so erhält man

$$\gamma_1 = \frac{x_1}{m}; \quad \gamma_2 = \frac{x_2}{m}; \quad \gamma_3 = \frac{x_3}{m} \qquad (7_1.)$$

und weiter wegen $(2_1.)$ und (3.)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 &= +mH; \\ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 &= -m\Xi \end{aligned}\right\} \quad (8.)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dt} &= \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}; \\ \frac{dH}{dt} &= \beta_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}; \end{aligned}\right\} \quad (9.)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{m}\left[x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}\right]. \qquad (9_1.)$$

Die Koordinaten des in dem beweglichen Körper festen Punktes O sind durch die Gleichungen (8.) und $(9_1.)$ bestimmt, und würde man noch die Richtungscosinus $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ kennen, so wäre die Lage des Körpers im Raume in jedem Augenblick völlig gegeben.

Man kann die Lage des beweglichen Körpers auch durch die Koordinaten Ξ, H, Z zusammen mit den *Euler*schen Winkeln ϑ, φ, ψ bestimmen.

Die Richtungscosinus α_ν, β_ν, γ_ν sind mit diesen Winkeln durch die folgenden Relationen verbunden:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\cos\varphi\cos f\cos\vartheta - \sin\varphi\sin f;\\
\alpha_2 &= -\cos\varphi\sin f\cos\vartheta + \sin\varphi\cos f;\\
\alpha_3 &= \cos\varphi\sin\vartheta;\\
\beta_1 &= -\sin\varphi\cos f\cos\vartheta + \cos\varphi\sin f;\\
\beta_2 &= -\sin\varphi\sin f\cos\vartheta - \cos\varphi\cos f;\\
\beta_3 &= \sin\varphi\sin\vartheta;
\end{aligned}\right\} \qquad (10.)$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \cos f\sin\vartheta;\\
\gamma_2 &= \sin f\sin\vartheta;\\
\gamma_3 &= \cos\vartheta.
\end{aligned}\right\} \qquad (10_1.)$$

Aus den drei letzten Gleichungen findet man wegen $(7_1.)$:

$$\cos\vartheta = \frac{x_3}{m};\ \sin\vartheta = \frac{\sqrt{m^2-x_3^2}}{m}; \qquad (11.)$$

$$\cos f = \frac{x_1}{\sqrt{m^2-x_3^2}};\quad \sin f = \frac{x_2}{\sqrt{m^2-x_3^2}};\quad \operatorname{tg} f = \frac{x_2}{x_1}. \qquad (11_1.)$$

Den Winkel φ erhält man durch Integration der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = m\,\frac{p\dfrac{\partial T}{\partial u} + q\dfrac{\partial T}{\partial v}}{\left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)^2},$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = m\,\frac{x_1\dfrac{\partial T}{\partial y_1} + x_2\dfrac{\partial T}{\partial y_2}}{m^2-x_3^2}. \qquad (12.)$$

B. Grundformeln.

4. Wir wollen hier vier neue Größen T_0, T_1, T_2, T_3 durch folgende Gleichungen einführen:

$$T_0=\frac{1}{m}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{m^2-x_3^2}};\ T_1=\frac{1}{m}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{m^2-x_3^2}};\ T_2=\frac{1}{m}\sqrt{m^2-x_3^2}\cos\varphi;\ T_3=\frac{1}{m}\sqrt{m^2-x_3^2}\sin\varphi; \qquad (13.)$$

hieraus folgt

$$T_0^2+T_1^2=\frac{1}{m^2}\frac{1}{m^2-x_3^2};\quad T_2^2+T_3^2=\frac{m^2-x_3^2}{m^2};\quad T_0T_2=\frac{\cos^2\varphi}{m^2};$$

$$T_1T_3=\frac{\sin^2\varphi}{m^2};\quad T_0T_3=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{m^2}=T_1T_2. \qquad (13_1.)$$

Die Hilfsfunktionen $T_s (s = 0, \ldots 3)$ enthalten nur die beiden Variabeln x_3 und φ, und da x_3 und φ sich in allen Fällen, die wir im folgenden behandeln werden, durch die unabhängige Variable t ausdrücken lassen, so können die T_s-Funktionen selbst in diesen Fällen als explizite Funktionen der Zeit dargestellt werden.

Mit Hilfe der Größen T_s kann man die in (10.) angegebenen Ausdrücke von α_ν, β_ν folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -x_1 x_3 T_0 - m x_2 T_1; \\ \alpha_2 &= -x_2 x_3 T_0 + m x_1 T_1; \\ \alpha_3 &= T_2; \end{aligned}\right\} \tag{14.}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= -x_1 x_3 T_1 + m x_2 T_0; \\ \beta_2 &= -x_2 x_3 T_1 - m x_1 T_0; \\ \beta_3 &= T_3; \end{aligned}\right\} \tag{14$_1$.}$$

und die Gleichungen (8.) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} +m\Xi &= +x_3 (n - x_3 y_3) T_1 - m (x_2 y_1 - x_1 y_2) T_0 - y_3 T_3; \\ +mH &= -x_3 (n - x_3 y_3) T_0 - m (x_2 y_1 - x_1 y_2) T_1 + y_3 T_2. \end{aligned}\right\} \tag{15.}$$

5. Man kann ein klares Bild von der Art der Bewegung eines Körpers im Raume erhalten, wenn man die Bahn des Ursprungs O studiert und gleichzeitig ermittelt, wie die Achse OZ des Körpers im Raume schwankt. Letzteres geschieht, indem man die Variation des Winkels ϑ bestimmt. Um nun eine gute Vorstellung von der Bahn des Punktes O im Raume, der *Raumbahn* von O, zu erhalten, untersuchen wir die Bahn des Projektionspunktes O_1 von O in der festen $\xi\eta$-Ebene; O_1 bewegt sich dann längs der Projektion der *Raumbahn* in der $\xi\eta$-Ebene.

Wir bezeichnen zu diesem Zwecke den Radiusvektor der Projektionskurve mit R und mit V den Winkel, den R mit der *positiven η-Achse* bildet.

Man findet dann zufolge (15.)

$$m^4 R^2 = m^4 (\Xi^2 + H^2) =$$

$$= \left[\frac{x_3 (n - x_3 y_3)}{\sqrt{m^2 - x_3^2}} - \sqrt{m^2 - x_3^2}\, y_3\right]^2 + m^2 \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2}{m^2 - x_3^2};$$

oder

$$m^4 R^2 = \frac{(n x_3 - m^2 y_3)^2 + m^2 (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2}{m^2 - x_3^2}. \tag{16.}$$

Man kann diese Gleichung in eine noch einfachere Form bringen. Wegen der Identität

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = \\ = (m^2 - x_3^2)(y_1^2 + y_2^2) - (n - x_3 y_3)^2$$

erhält man nämlich

$$m^2 R^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - n'^2, \text{ wo } n' = \frac{n}{m}. \qquad (16_1.)$$

Wir wollen außerdem noch eine Formel von grundlegender Bedeutung für das Studium des Bewegungsverlaufes der Körper hinzufügen.

Man hat

$$\operatorname{tg} V = \frac{\Xi}{H},$$

woraus sich

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} V}{1 - i \operatorname{tg} V} = \frac{H + i\Xi}{H - i\Xi} = \frac{x_3(n - x_3 y_3)(T_0 - iT_1) + im(x_2 y_1 - x_1 y_2)(T_0 - iT_1) - y_3(T_2 - iT_3)}{x_3(n - x_3 y_3)(T_0 + iT_1) - im(x_2 y_1 - x_1 y_2)(T_0 + iT_1) - y_3(T_2 + iT_3)} = \\ = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \cdot \frac{x_3(n - x_3 y_3) + im(x_2 y_1 - x_1 y_2) - y_3(m^2 - x_3^2)}{x_3(n - x_3 y_3) - im(x_2 y_1 - x_1 y_2) - y_3(m^2 - x_3^2)}$$

ergibt; diese Relation kann in einer der folgenden Formen geschrieben werden:

$$V = -\varphi + \frac{1}{2i} \log \frac{(n x_3 - m^2 y_3) + im(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(n x_3 - m^2 y_3) - im(x_2 y_1 - x_1 y_2)}, \qquad (17.)$$

oder

$$\operatorname{tg}(V + \varphi) = m \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{n x_3 - m^2 y_3}. \qquad (17_1.)$$

Die Gleichungen (16.) und (17_1.) können auch durch folgende Relationen ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} x_2 y_1 - x_1 y_2 &= m R \sin U \sqrt{m^2 - x_3^2}, \\ n x_3 - m^2 y_3 &= m^2 R \cos U \sqrt{m^2 - x_3^2}, \\ \text{wo} \quad U &= V + \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (18.)$$

Diese Formeln enthalten, wie man sieht, die Gleichung der Projektion der *Raumbahn* des Punktes O auf die $\xi\eta$-Ebene, und die Gleichungen der Raumbahn selbst bestehen aus (9_1.), (16_1.) und (17.) zusammen mit (12.).

Wenn man mittels der Integrale (6_1.) in (16_1.) und (17.), oder in den Gleichungen (18.) die Variabeln x_ν, y_ν eliminieren kann, so erhält man ein Ergebnis von der Form

$$F(R, U) = 0. \qquad (18_1.)$$

Der Projektionspunkt O_1 bewegt sich also längs dieser Kurve, während

die Kurve selbst sich gleichzeitig mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ***um den festen Ursprung o dreht.***

6. Es ist klar, daß die oben abgeleiteten Formeln bei der Untersuchung, wie der Körper sich im Raume fortbewegt, von Bedeutung sein können.

Wir wollen z. B. annehmen, daß die Form und die Anfangsbewegung des Körpers und die Lage des Koordinatensystemes O, X, Y, Z solche sind, daß die Variabeln x_ν und y_ν *periodische* Funktionen der Zeit sind, und zwar sämtlich mit der Periode Ω. Während jedes solchen Zeitintervalles erleiden sowohl die Koordinate Z als auch der Winkel φ, und infolgedessen auch der Polarwinkel V, konstante Veränderungen, während der Radiusvektor periodisch zwischen einem kleinsten und einem größten Wert (R' und R'') hin und her schwankt. Die OZ-Achse des Körpers aber bildet mit der im Raume festen $o\zeta$-Achse einen Winkel ϑ, der währenddessen zwischen den Grenzen $\arccos \frac{x_3'}{m}$ und $\arccos \frac{x_3''}{m}$ schwankt, wo x_3' und x_3'' die R' und R'' entsprechenden Werte von x_3 sind.

Schon aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß der Ursprung O, das *Zentrum* des Körpers, eine *schraubenförmige Bahn im Raume* beschreiben wird. Diese schraubenförmige Bahn wird vollständig von zwei konachsialen Zylinderflächen mit kreisförmigen Querschnitten eingeschlossen, deren gemeinschaftliche Achse die $o\zeta$-Achse ist und deren Halbmesser bezw. R' und R'' sind. Die Bahn berührt wechselweise diese Flächen.

In gewissen Fällen können die Zylinderflächen in ein ebenes Band übergehen, das in einer durch die $o\zeta$-Achse gehenden Ebene liegt und von zwei mit der Achse parallelen Geraden, z. B. L' und L'', begrenzt wird. In einem solchen Falle, der bei $V = \text{const.}$ eintritt, bewegt sich also das *Zentrum* O des Körpers dauernd in einer und derselben Ebene, und zwar innerhalb des Teiles dieser Ebene, der zwischen den Geraden L' und L'' liegt, welche während der Bewegung wechselweise von O berührt werden.

7. Ich will in diesem Zusammenhange noch eine allgemeingültige Formel ableiten, mit deren Hilfe man den Winkel ψ berechnen kann, den die Tangente in einem beliebigen Punkte der Projektionskurve der Raumbahn in der $\xi\eta$-Ebene mit der positiven ξ-Achse bildet.

Wenn man in die Differentialgleichungen (9.) mittels (14.) und (14_1.) die Größen T_s einführt, so erhält man

$$\frac{d\Xi}{dt} = m\left(x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)T_1 - x_3\left(x_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)T_0 + T_2\frac{\partial T}{\partial x_3};$$

$$\frac{dH}{dt} = -m\left(x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)T_0 - x_3\left(x_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)T_1 + T_3\frac{\partial T}{\partial x_3},$$

woraus sich

$$\sin\varphi\frac{d\Xi}{dt} - \cos\varphi\frac{dH}{dt} = \frac{x_1\dfrac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial T}{\partial x_1}}{\sqrt{m^2 - x_3^2}};$$

$$\cos\varphi\frac{d\Xi}{dt} + \sin\varphi\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{x_3\left(x_1\dfrac{\partial T}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial T}{\partial x_2}\right) - (m^2 - x_3)\dfrac{\partial T}{\partial x_3}}{\sqrt{m^2 - x_3^2}}$$

ergibt; hieraus folgt

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = m\frac{x_1\dfrac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial T}{\partial x_1}}{x_3\left(x_1\dfrac{\partial T}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial T}{\partial x_2}\right) - (m^2 - x_3^2)\dfrac{\partial T}{\partial x_3}}, \qquad (19.)$$

wodurch jener Winkel ψ bestimmt wird. —

Gilt speziell, wie es in verschiedenen Fällen zutrifft, die Relation

$$x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \qquad (19_1.)$$

so ergibt sich die bemerkenswerte Gleichung

$$\psi = \varphi. \qquad (19_2.)$$

C. Koordinatentransformation.

8. Wenn man das Problem der Bewegung starrer Körper in idealen Flüssigkeiten behandeln will und zu diesem Zwecke die Integration der Bewegungsgleichungen (6.) in deren allgemeinster Form zu bewerkstelligen sucht, wobei die lebendige Kraft also durch (5_2.) gegeben ist, so bestehen die größten Schwierigkeiten darin, daß die Gleichungen eine so große Anzahl von Gliedern enthalten werden. Es erschienen bei der Integration die Schwierigkeiten so groß, daß es bisher nur in einigen Fällen gelungen ist, dieselben zu überwinden; diese Fälle sind durch eine besonders einfache Symmetrie hinsichtlich der Form und der Massenverteilung des Körpers charakterisiert, oder auch durch gewisse einschränkende Bedingungen bezüglich der Frei-

heit der Anfangsbewegung und durch spezialisierende Relationen zwischen den Konstanten $a_{\lambda\mu}$ gekennzeichnet.

Jedoch kann man die Anzahl der Glieder in den Differentialgleichungen und damit auch die Schwierigkeiten bei der Integration etwas verringern, wenn man nur, je nach den verschiedenen Fällen, das im Körper feste Koordinatensystem, das wir im folgenden mit $O'X'Y'Z'$ bezeichnen wollen, in zweckmäßiger Weise transformiert in ein neues System $OXYZ$. Die dem ersten Systeme entsprechenden Bewegungsgrößen bezeichnen wir mit $u', v', w', p', q', r', x'_\nu, y'_\nu$, sodaß der Ausdruck der lebendigen Kraft so aussieht:

$$\left.\begin{aligned} 2T' = {} & a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + 2a'_{13}x'_1x'_3 + 2a'_{14}x'_1y'_1 + 2a'_{15}x'_1y'_2 + 2a'_{16}x'_1y'_3 + \\ & + a'_{22}x_2'^2 + 2a'_{23}x'_2x'_3 + 2a'_{24}x'_2y'_1 + 2a'_{25}x'_2y'_2 + 2a'_{26}x'_2y'_3 + \\ & + a'_{33}x_3'^2 + 2a'_{34}x'_3y'_1 + 2a'_{35}x'_3y'_2 + 2a'_{36}x'_3y'_3 + \\ & + a'_{44}y_1'^2 + 2a'_{45}y'_1y'_2 + 2a'_{46}y'_1y'_3 + \\ & + a'_{55}y_2'^2 + 2a'_{56}y'_2y'_3 + \\ & + a'_{66}y_3'^2. \end{aligned}\right\} \quad (20.)$$

Die Koordinaten des Ursprungs O im ersten Systeme seien $-x'_0, -y'_0, -z'_0$. Bezeichnet man ferner die Richtungscosinus zwischen den beiden Achsensystemen mit $\alpha'_\nu, \beta'_\nu, \gamma'_\nu$, so hat man die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} u &= u' + y'_0r' - z'_0q'; & p &= \alpha'_1p' + \beta'_1q' + \gamma'_1r'; \\ v &= v' + z'_0p' - x'_0r'; & q &= \alpha'_2p' + \beta'_2q' + \gamma'_2r'; \\ w &= w' + x'_0q' - y'_0p'; & r &= \alpha'_3p' + \beta'_3q' + \gamma'_3r'; \end{aligned}\right\} \quad (21.)$$

Denken wir uns nun die lebendige Kraft (4.) mittels der Gleichungen (21.) als eine Funktion von u', v', w', p', q', r' dargestellt und bezeichnen wir den so entstehenden Ausdruck mit $2T'$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial T'}{\partial u'} = \frac{\partial T}{\partial u}; \quad \frac{\partial T'}{\partial v'} = \frac{\partial T}{\partial v}; \quad \frac{\partial T'}{\partial w'} = \frac{\partial T}{\partial w};$$

$$\frac{\partial T'}{\partial p'} = z'_0\frac{\partial T}{\partial v} - y'_0\frac{\partial T}{\partial w} + \alpha'_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha'_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha'_3\frac{\partial T}{\partial r};$$

$$\frac{\partial T'}{\partial q'} = x'_0\frac{\partial T}{\partial w} - z'_0\frac{\partial T}{\partial u} + \beta'_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta'_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta'_3\frac{\partial T}{\partial r};$$

$$\frac{\partial T'}{\partial r'} = y'_0\frac{\partial T}{\partial u} - x'_0\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma'_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma'_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma'_3\frac{\partial T}{\partial r};$$

oder

$$x_1' = x_1; \quad x_2 = x_2'; \quad x_3 = x_3' \tag{22.}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= z_0' x_2 - y_0' x_3 + \alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2 + \alpha_3' y_3; \\ y_2' &= x_0' x_3 - z_0' x_1 + \beta_1' y_1 + \beta_2' y_2 + \beta_3' y_3; \\ y_3' &= y_0' x_1 - x_0' x_2 + \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 + \gamma_3' y_3. \end{aligned}\right\} \tag{22_1.}$$

Werden diese Werte für x_ν', y_ν' in (20.) eingeführt, so nimmt die kinetische Energie des beweglichen Systemes die in (5_2.) gegebene Gestalt an, und dabei haben dann die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= a_{11}' + 2a_{16}'y_0' - 2a_{15}'z_0' + a_{66}'y_0'^2 - 2a_{56}'y_0'z_0' + a_{55}'z_0'^2; \\
a_{12} &= a_{12}' - a_{16}'x_0' + a_{26}'y_0' + (a_{14}' - a_{25}')z_0' - a_{66}'x_0'y_0' - a_{56}'x_0'z_0' + a_{46}'y_0'z_0' - a_{45}'z_0'^2; \\
a_{13} &= a_{13}' + a_{15}'x_0' + (a_{36}' - a_{14}')y_0' - a_{35}'z_0' - a_{46}'y_0'^2 + a_{56}'x_0'y_0' - a_{55}'x_0'z_0' + a_{45}'y_0'z_0'; \\
a_{14} &= (a_{14}' + a_{46}'y_0' - a_{45}'z_0')\alpha_1' + (a_{15}' + a_{56}'y_0' - a_{55}'z_0')\beta_1' + (a_{16}' + a_{66}'y_0' - a_{56}'z_0')\gamma_1'; \\
a_{15} &= (a_{14}' + a_{46}'y_0' - a_{45}'z_0')\alpha_2' + (a_{15}' + a_{56}'y_0' - a_{55}'z_0')\beta_2' + (a_{16}' + a_{66}'y_0' - a_{56}'z_0')\gamma_2'; \\
a_{16} &= (a_{14}' + a_{46}'y_0' - a_{45}'z_0')\alpha_3' + (a_{15}' + a_{56}'y_0' - a_{55}'z_0')\beta_3' + (a_{16}' + a_{66}'y_0' - a_{56}'z_0')\gamma_3'; \\
a_{22} &= a_{22}' - 2a_{26}'x_0' + 2a_{24}'z_0' + a_{66}'x_0'^2 - 2a_{46}'x_0'z_0' + a_{44}'z_0'^2; \\
a_{23} &= a_{23}' + (a_{25}' - a_{36}')x_0' - a_{24}'y_0' + a_{34}'z_0' - a_{56}'x_0'^2 + a_{46}'x_0'y_0' + a_{45}'x_0'z_0' - a_{44}'y_0'z_0'; \\
a_{24} &= (a_{24}' - a_{46}'x_0' + a_{44}'z_0')\alpha_1' + (a_{25}' - a_{56}'x_0' + a_{45}'z_0')\beta_1' + (a_{26}' - a_{66}'x_0' + a_{46}'z_0')\gamma_1'; \\
a_{25} &= (a_{24}' - a_{46}'x_0' + a_{44}'z_0')\alpha_2' + (a_{25}' - a_{56}'x_0' + a_{45}'z_0')\beta_2' + (a_{26}' - a_{66}'x_0' + a_{46}'z_0')\gamma_2'; \\
a_{26} &= (a_{24}' - a_{46}'x_0' + a_{44}'z_0')\alpha_3' + (a_{25}' - a_{56}'x_0' + a_{45}'z_0')\beta_3' + (a_{26}' - a_{66}'x_0' + a_{46}'z_0')\gamma_3'; \\
a_{33} &= a_{33}' + 2a_{35}'x_0' - 2a_{34}'y_0' + a_{55}'x_0'^2 - 2a_{45}'x_0'y_0' + a_{44}'y_0'^2; \\
a_{34} &= (a_{34}' + a_{45}'x_0' - a_{44}'y_0')\alpha_1' + (a_{35}' + a_{55}'x_0' - a_{45}'y_0')\beta_1' + (a_{36}' + a_{56}'x_0' - a_{46}'y_0')\gamma_1'; \\
a_{35} &= (a_{34}' + a_{45}'x_0' - a_{44}'y_0')\alpha_2' + (a_{35}' + a_{55}'x_0' - a_{45}'y_0')\beta_2' + (a_{36}' + a_{56}'x_0' - a_{46}'y_0')\gamma_2'; \\
a_{36} &= (a_{34}' + a_{45}'x_0' - a_{44}'y_0')\alpha_3' + (a_{35}' + a_{55}'x_0' - a_{45}'y_0')\beta_3' + (a_{36}' + a_{56}'x_0' - a_{46}'y_0')\gamma_3'; \\
a_{44} &= a_{44}'\alpha_1'^2 + a_{55}'\beta_1'^2 + a_{66}'\gamma_1'^2 + 2(a_{45}'\alpha_1'\beta_1' + a_{46}'\alpha_1'\gamma_1' + a_{56}'\beta_1'\gamma_1'); \\
a_{45} &= (a_{44}'\alpha_2' + a_{45}'\beta_2' + a_{46}'\gamma_2')\alpha_1' + (a_{45}'\alpha_2' + a_{55}'\beta_2' + a_{56}'\gamma_2')\beta_1' + (a_{46}'\alpha_2' + a_{56}'\beta_2' + a_{66}'\gamma_2')\gamma_1'; \\
a_{46} &= (a_{44}'\alpha_3' + a_{45}'\beta_3' + a_{46}'\gamma_3')\alpha_1' + (a_{45}'\alpha_3' + a_{55}'\beta_3' + a_{56}'\gamma_3')\beta_1' + (a_{46}'\alpha_3' + a_{56}'\beta_3' + a_{66}'\gamma_3')\gamma_1'; \\
a_{55} &= a_{44}'\alpha_2'^2 + a_{55}'\beta_2'^2 + a_{66}'\gamma_2'^2 + 2(a_{45}'\alpha_2'\beta_2' + a_{46}'\alpha_2'\gamma_2' + a_{56}'\beta_2'\gamma_2'); \\
a_{56} &= (a_{44}'\alpha_3' + a_{45}'\beta_3' + a_{46}'\gamma_3')\alpha_2' + (a_{45}'\alpha_3' + a_{55}'\beta_3' + a_{56}'\gamma_3')\beta_2' + (a_{46}'\alpha_3' + a_{56}'\beta_3' + a_{66}'\gamma_3')\gamma_2'; \\
a_{66} &= a_{44}'\alpha_3'^2 + a_{55}'\beta_3'^2 + a_{66}'\gamma_3'^2 + 2(a_{45}'\alpha_3'\beta_3' + a_{46}'\alpha_3'\gamma_3' + a_{56}'\beta_3'\gamma_3').
\end{aligned}\right\} \tag{22_2.}$$

Weil zwischen den Richtungscosinus Relationen bestehen, erhält man die Gleichung

$$a_{44} + a_{55} + a_{66} = a_{44}' + a_{55}' + a_{66}'. \tag{22_3.}$$

Weil die Transformationsformeln (22.) und (22_1.) sechs voneinander unabhängige willkürliche Konstanten, nämlich x_0', y_0', z_0' und die drei von-

einander unabhängigen Winkelkoordinaten, enthalten, so wird man im allgemeinen durch Anwendung dieser Transformationen erreichen können, daß sechs Bedingungsgleichungen zwischen den Konstanten $a'_{\lambda\mu}$ identisch erfüllt werden. Wie diese Koordinatentransformation am zweckmäßigsten zu geschehen hat, kann nur in jedem einzelnen Falle entschieden werden.

Wir wollen im folgenden von obigen Transformationsformeln Gebrauch machen, und zwar zuerst bei der Bewegung von Körpern einfacherer Form, nämlich solchen mit bzw. *zwei und einer Symmetrieebene*; später werden wir die Transformationen auf das ganz allgemeine Bewegungsproblem anwenden.

D. Anwendungen.

I. *Die Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten, die zwei zueinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen.*

9. Wenn die beiden Symmetrieebenen des Körpers als $X'Y'$- und $Y'Z'$-Ebene gewählt werden, so hat die lebendige Kraft des sich bewegenden Systemes den Wert

$$2T' = a'_{11}x'^2_1 + a'_{22}x'^2_2 + a'_{33}x'^2_3 + a'_{44}y'^2_1 + a'_{55}y'^2_2 + a'_{66}y'^2_3 + 2a'_{16}x'_1y'_3 + 2a'_{34}x'_3y'_1. \quad (23.)$$

Bezüglich der Form und der Massenverteilung des Körpers machen wir nun die einschränkende Voraussetzung, daß die Koeffizienten $a'_{\lambda\mu}$ *zwei Bedingungen* befriedigen, nämlich

$$a'_{22} = a'_{11} + 2\varepsilon a'_{16} + \varepsilon^2 a'_{66}; \qquad a'_{55} = a'_{44}; \qquad \text{wo } \varepsilon = \frac{a'_{34}}{a'_{44}}; \qquad (23_1.)$$

dann lautet der Energieausdruck:

$$2T' = a'_{11}x'^2_1 + (a'_{11} + 2\varepsilon a'_{16} + \varepsilon^2 a'_{66})x'^2_2 + a'_{33}x'^2_3 + a'_{44}(y'^2_1 + y'^2_2) + \\ + a'_{66}y'^2_3 + 2a'_{16}x'_1y'_3 + 2a'_{34}x'_3y'_1. \quad (23_2.)$$

Wir verschieben nun das Koordinatensystem $O'X'Y'Z'$ parallel mit sich selbst, und zwar so, daß der Ursprung O' längs der $O'Y'$-Achse bis an einen Punkt O gleitet, dessen Ordinate $y'_0 = \frac{a'_{34}}{a'_{44}}$ ist. Die Transformationsformeln lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3; \\ y'_1 &= -\varepsilon x_3 + y_1; \quad y'_2 = y_2; \quad y'_3 = +\varepsilon x_1 + y_3, \end{aligned}\right\} \qquad (24.)$$

und der Ausdruck für die lebendige Kraft vereinfacht sich zu

$$2T = a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}x_3^2 + 2a_{16}x_1y_3 + a_{44}(y_1^2 + y_2^2) + a_{66}y_3^2, \qquad (24_1.)$$

wo

$$a_{11} = a'_{11} + 2\varepsilon a'_{16} + \varepsilon^2 a'_{66};\ a_{33} = a'_{33} - \varepsilon a'_{34};\ a_{16} = a'_{16} + \varepsilon a'_{66};\ a_{44} = a'_{44};\ a_{66} = a'_{66}. \quad (24_2.)$$

Weil

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{16}y_3; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = a_{11}x_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = a_{33}x_3; \\ &\frac{\partial T}{\partial y_1} = a_{44}y_1; \quad\quad \frac{\partial T}{\partial y_2} = a_{44}y_2; \quad \frac{\partial T}{\partial y_3} = a_{16}x_1 + a_{66}y_3 \end{aligned}\right\} \quad (24_3.)$$

ist, werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a_{16}x_1x_2 + a_{44}x_3y_2 - a_{66}x_2y_3; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{16}x_1^2 + a_{66}x_1y_3 - a_{44}x_3y_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{44}(x_2y_1 - x_1y_2); \end{aligned}\right\} \quad (25.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (a_{11} - a_{33})x_2x_3 - a_{16}x_1y_2 + (a_{44} - a_{66})y_2y_3; \\ \frac{dy_2}{dt} &= -(a_{11} - a_{33})x_1x_3 + a_{16}(x_1y_1 - x_3y_3) - (a_{44} - a_{66})y_3y_1; \\ \frac{dy_3}{dt} &= a_{16}x_2y_3. \end{aligned}\right\} \quad (25_1.)$$

10. Diese Differentialgleichungen haben das partikuläre Integral

$$y_3 = 0 \quad (25_2.)$$

und lassen sich hier dementsprechend in der vereinfachten Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -bx_1x_2 + ax_3y_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= bx_1^2 - ax_3y_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a(x_2y_1 - x_1y_2) \end{aligned}\right\} \quad (26.)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -cx_2x_3 - bx_1y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} &= +cx_1x_3 + bx_1y_1, \end{aligned}\right\} \quad (26_1.)$$

wenn wir die Bezeichnungen

$$a = a_{44};\quad b = a_{16};\quad c = a_{33} - a_{11} \quad (26_2.)$$

einführen.

Aus (26.) und (26_1.) ergeben sich zunächst die *Kirchhoff-Clebsch*-schen Integrale

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= m^2; \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= n; \\ c x_3^2 + a(y_1^2 + y_2^2) &= l - a_{11} m^2 = L. \end{aligned}\right\} \qquad (27.)$$

Aber man findet noch ein weiteres Integral, das *Zeitintegral*, denn man hat

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = a^2 (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = a^2 (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - a^2 (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2$$

oder

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = a(m^2 - x_3^2)(L - c x_3^2) - a^2 n^2, \qquad (27_1.)$$

woraus x_3 sich als eine elliptische Funktion der Zeit ergibt. Mit deren Hilfe kann man dann die Lage des *Zentrums O des Körpers in jedem Augenblicke bestimmen.*

11. Wir wollen nun die Gleichung (27_1.) etwas näher untersuchen und schreiben sie

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l_0 (m^2 - x_3^2)(M - x_3^2) - a^2 n^2 = F(x_3), \qquad (28.)$$

wo

$$l_0 = ac; \quad M = \frac{L}{c}. \qquad (28_1.)$$

Aus dem ersten der Integrale (27.) folgert man, daß die Größe x_3 während des ganzen Bewegungsverlaufes zwischen $-m$ und $+m$ variieren muß, ohne jedoch diese Grenzen selbst erreichen zu können, wie daraus hervorgeht, daß man in einem solchen Falle $F(\pm m) = -a^2 n^2$ hätte, was unmöglich ist, wenn wirklich eine Bewegung stattfinden soll. Wir erhalten also

$$-m < x_3 < +m.$$

Weil stets $F(x_3) \geqq 0$ ist, $F(-m)$ und $F(+m)$ aber negative Werte haben, so ist es klar, daß die Gleichung $F(x_3) = 0$ wenigstens zwei reelle Wurzeln haben muß, die wir ϱ' und ϱ'' ($\varrho' < \varrho''$) nennen und die zwischen den Grenzen $\pm m$ liegen. Da x_3 nicht nur im Bereiche $-m \cdots +m$ variiert, sondern auch stets *zwischen* den Wurzelpunkten ϱ' und ϱ'' schwanken muß, so erhält man

$$-m < \varrho' \leqq x_3 \leqq \varrho'' < +m. \tag{29.}$$

Wenn man jetzt die Diskriminante gleich D setzt, also

$$\left.\begin{aligned} (m^2+M)^2 - 4\left(m^2M - \frac{a^2n^2}{l_0}\right) &= (m^2-M)^2 + 4\frac{a^2n^2}{l_0} = D \\ \text{und außerdem die Bezeichnung} \\ m^2 + M &= D' \end{aligned}\right\} \tag{29$_1$.}$$

einführt, so läßt sich die Gleichung (28.) folgendermaßen schreiben

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l_0\left[x_3^2 - \frac{1}{2}(D' + \sqrt{D})\right]\left[x_3^2 - \frac{1}{2}(D' - \sqrt{D})\right] = F(x_3). \tag{29$_2$.}$$

Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $l_0 > 0$, d. h. $a_{33} > a_{11}$.

Aus (27$_1$.) folgt, daß $L > 0$ vorausgesetzt werden muß, weil a und c positive Größen sind; hieraus ergibt sich $M > 0$.

Weil $F(x_3)$ immer positiv ist, wenn x_3 zwischen den Grenzen ϱ' und ϱ'' schwankt, so muß man, damit eine Bewegung stattfindet, den Größen der Anfangsbewegung solche Werte geben, daß $F(0) > 0$, d. h. solche Werte, daß

$$l_0 m^2 M - a^2 n^2 > 0 \tag{30'.}$$

wird.

Hieraus folgt wegen der Identität

$$D'^2 = D + 4\left(m^2M - \frac{a^2n^2}{l_0}\right),$$

daß $D'^2 > D$ ist, und demnach ist $D' > +\sqrt{D}$, weil D' nach der gemachten Voraussetzung *positiv* ist. Hieraus geht hervor, daß *alle vier Wurzeln der Gleichung* $F(x_3) = 0$ *reell sind.* Von diesen vier Wurzeln liegen zwei außerhalb des Intervalles $-m \cdots +m$.

Wenn man also diese Wurzeln der Größe nach mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ bezeichnet, so erhält man

$$\varrho_1 < -m < \varrho_2 \leqq x_3 \leqq \varrho_3 < +m < \varrho_4, \tag{30.}$$

und die Werte der Wurzeln sind

$$\varrho_1 = -\sqrt{\frac{D'+\sqrt{D}}{2}};\quad \varrho_2 = -\sqrt{\frac{D'-\sqrt{D}}{2}};\quad \varrho_3 = +\sqrt{\frac{D'-\sqrt{D}}{2}};\quad \varrho_4 = +\sqrt{\frac{D'+\sqrt{D}}{2}}. \tag{30$_1$.}$$

II. $l_0 < 0$, d. h. $a_{33} < a_{11}$.

Wir setzen $l_0 = -\lambda_0$, wo $\lambda_0 = a(a_{11} - a_{23}) > 0$ ist, und $M' = \frac{L}{\lambda_0}$.

Hier kann $L \gtrless 0$ sein, also auch $M' \gtrless 0$. Wir wollen zuerst $M' > 0$ annehmen.

Dann wird

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = \lambda_0 (m^2 - x_3^2)(M' + x_3^2) - a^2 n^2 = F(x_3), \tag{31.}$$

oder

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = -\lambda_0 \left[x_3^2 - \frac{1}{2}(D' + \sqrt{D})\right]\left[x_3^2 - \frac{1}{2}(D' - \sqrt{D})\right],$$

wo

$$D' = m^2 - M'; \quad D = D'^2 + 4\left(m^2 M' - \frac{a^2 n^2}{\lambda_0}\right). \tag{31$_1$.}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) $\lambda_0 m^2 M' - a^2 n^2 > 0$.

In diesem Falle hat die Gleichung $F(x_3) = 0$ *zwei reelle Wurzeln*, ϱ_1 und ϱ_4, die zwischen $-m$ und $+m$ liegen, weil $F(0) > 0$ und $F(\pm m) < 0$ ist, und *zwei imaginäre*, ϱ_2 und ϱ_3.

Die Werte der reellen Wurzeln sind:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= -\sqrt{\frac{\sqrt{D} + D'}{2}}; \quad \varrho_4 = +\sqrt{\frac{\sqrt{D} + D'}{2}} \\ \text{und die der imaginären:} & \\ \varrho_2 &= -i\sqrt{\frac{\sqrt{D} - D'}{2}}; \quad \varrho_3 = +i\sqrt{\frac{\sqrt{D} - D'}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{31$_2$.}$$

Man hat außerdem

$$-m < \varrho_1 \leqq x_3 \leqq \varrho_4 < +m. \tag{31$_3$.}$$

b) $\lambda_0 m^2 M' - a^2 n^2 < 0$.

Unter dieser Voraussetzung kann $D > 0$ oder $D < 0$ sein, und zwar hängt dies von den Größen der Anfangsbewegung ab. Wir nehmen an:

1. $D > 0$.

Wenn α) $D' > 0$ ist, so wird $D' > \sqrt{D}$, und *alle vier Wurzeln werden reell*; ihre Lage ist gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \alpha') \quad & -m < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \leqq x_3 \leqq \varrho_4 < +m; \\ \alpha'') \quad & -m < \varrho_1 \leqq x_3 \leqq \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4 < +m. \end{aligned}\right\} \tag{32.}$$

Wenn β) $D' < 0$ ist, so wird $D' < -\sqrt{D}$, und *alle vier Wurzeln werden imaginär.*

Dieser letzte Fall kann bei keiner Bewegung der Körper eintreten, ebensowenig wie der Fall

2. $D < 0$, wo auch *alle Wurzeln imaginär werden.*

Im Falle $M' < 0$ führt man die Diskussion der Zeitgleichung ebenso wie oben durch.

Wir wollen im folgenden die Lage des Zentrums O in einigen der oben angegebenen Fälle noch näher bestimmen.

Der Fall I ($l_0 > 0$).

12. In diesem Falle kann die Zeitgleichung (28.) so geschrieben werden:

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l_0(\varrho_3^2 - x_3^2)(\varrho_4^2 - x_3^2), \tag{33.}$$

wo ϱ_3 und ϱ_4 die in (30_1.) angegebenen Werte haben. Führt man in die letzte Gleichung mittels

$$x_3 = \varrho_3 \cdot s \tag{33_1.}$$

eine neue Variable s sein, so erhält man

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = g_1 t + g_2,$$

wo

$$k = \frac{\varrho_3}{\varrho_4} < 1; \quad g_1 = \varrho_4 \sqrt{l_0}; \quad g_2 = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}$$

ist, wenn s_0 den Wert von s bezeichnet, der dem Beginn der Bewegung, d. h. $x_3 = x_{3,0}$, entspricht, sodaß $s_0 = \frac{x_{3,0}}{\varrho_3}$ ist, woraus $-1 < s_0 < +1$ folgt. Hieraus geht hervor, daß die Konstanten g_1 und g_2 *reelle* Größen sind.

Wenn wir die Bezeichnung

$$\tau = g_1 t + g_2 \tag{34.}$$

einführen, so erhalten wir

$$x_3 = \varrho_3 \, sn\, \tau. \tag{34_1.}$$

13. Den *Euler*schen Winkel φ erhält man aus der Gleichung

$$d\varphi = a\,m\,n\,\frac{dt}{m^2 - x_3^2};$$

und hieraus ergibt sich

$$i\,d\varphi = -\frac{i\,a\,m\,n}{g_1\,\varrho_3^2}\,\frac{d\tau}{sn^2\tau - sn^2\omega'},$$

wo die Konstante ω' durch die Gleichung

$$sn\,(\omega', k) = \frac{m}{\varrho_3} \tag{35.}$$

definiert ist; und also:

$$cn\,(\omega', k) = i\,\frac{\sqrt{m^2 - \varrho_3^2}}{\varrho_3}; \quad dn\,(\omega', k) = \frac{\sqrt{\varrho_3^2 - k^2 m^2}}{\varrho_3};$$

woraus

$$i \cdot \frac{m\sqrt{m^2 - \varrho_3^2} \cdot \sqrt{\varrho_3^2 - k^2 m^2}}{\varrho_3^3} = sn\,\omega' \cdot cn\,\omega' \cdot dn\,\omega'.$$

Es ist aber

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = g_1^2 \varrho_3^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

oder

$$l_0 (m^2 - x_3^2)(M - x_3^2) - a^2 n^2 = g_1^2 \varrho_3^2 (1 - s^2)(1 - k^2 s^2),$$

und weil der Wert $s = \frac{m}{\varrho_3}$ dem Wert $x_3 = m$ entspricht, so erhält man aus dieser Identität:

$$\sqrt{(m^2 - \varrho_3^2)(\varrho_3^2 - m^2 k^2)} = \frac{n\,a\,\varrho_3}{g_1}$$

und infolgedessen

$$i\,\frac{a\,m\,n}{g_1\,\varrho_3^3} = sn\,\omega'\,cn\,\omega'\,dn\,\omega',$$

woraus

$$i\varphi = i\varphi_0 - \int_{\varrho_2}^{\tau} \frac{sn\,\omega'\,cn\,\omega'\,dn\,\omega'}{sn^2\tau - sn^2\omega}\,d\tau.$$

Wenn man bei der Integration *Jakobi*sche Θ-Funktionen anwendet, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} i\varphi &= i\,(\mu_1 + \mu_2\tau) - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta_1(\omega' - \tau)}{\Theta_1(\omega' + \tau)}, \\ \text{wo } \mu_1 &= \varphi_0 + \frac{1}{i}\frac{\Theta'(\omega')}{\Theta(\omega')} \cdot g_2 + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(\omega' - g_2)}{\Theta_1(\omega' + g_2)};\ \mu_2 = -\frac{1}{i}\frac{\Theta'(\omega')}{\Theta(\omega')}. \end{aligned}\right\} \tag{36.}$$

Ehe wir weitergehen, wollen wir die Konstante ω' genauer bestimmen. Es ist

$$\omega' = \int_0^{s'} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}},$$

wo $s' = \frac{m}{\varrho_3} > 0$ ist, also $s'^2 - 1 = \frac{m^2 - \varrho_3^2}{\varrho_3^2} > 0$; $1 - k^2 s'^2 = \frac{\varrho_4^2 - m^2}{\varrho_4^2} > 0$, und wir können $\omega' = K - i\omega$ setzen, wo

$$\omega = \int_1^{s'} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2 s^2)}} = \int_0^{s''} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2 s^2)}}, \qquad (36_1.)$$

d. h. wegen

$$s'' = \frac{\sqrt{s'^2-1}}{k' s'} = \frac{\varrho_4}{m}\sqrt{\frac{m^2-\varrho_3^2}{\varrho_4^2-\varrho_3^2}} < 1$$

eine *reelle* Größe ist. Infolgedessen erhält man

$$i\varphi = i(\mu_1 + \mu_2 \tau) - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta_2(\tau + i\omega)}{\Theta_2(\tau - i\omega)}, \qquad (37.)$$

$$\mu_1 = \varphi_0 + \frac{1}{i}\frac{\Theta_3'(i\omega)}{\Theta_3(i\omega)} \cdot g_2 + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_2(g_2 + i\omega)}{\Theta_2(g_2 - i\omega)}; \quad \mu_2 = -\frac{1}{i}\frac{\Theta_3'(i\omega)}{\Theta_3(i\omega)}; \qquad (37_1.)$$

und also

$$\left.\begin{aligned} e^{+i\varphi} &= \sqrt{\frac{\Theta_2(\tau - i\omega)}{\Theta_2(\tau + i\omega)}}\, e^{+i(\mu_1 + \mu_2\tau)}; \\ e^{-i\varphi} &= \sqrt{\frac{\Theta_2(\tau + i\omega)}{\Theta_2(\tau - i\omega)}}\, e^{-i(\mu_1 + \mu_2\tau)}. \end{aligned}\right\} \qquad (37_2.)$$

Hieraus findet man weiter:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{T'}{\sqrt{P}}; \quad i\sin\varphi = \frac{1}{2}\frac{T''}{\sqrt{P}}, \qquad (38.)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} T' &= \Theta_2(\tau - i\omega)\, e^{+i(\mu_1 + \mu_2\tau)} + \Theta_2(\tau + i\omega)\, e^{-i(\mu_1 + \mu_2\tau)}; \\ T'' &= \Theta_2(\tau - i\omega)\, e^{+i(\mu_1 + \mu_2\tau)} - \Theta_2(\tau + i\omega)\, e^{-i(\mu_1 + \mu_2\tau)}; \\ P &= \Theta_2(\tau - i\omega)\,\Theta_2(\tau + i\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (38_1.)$$

Schreibt man nun

$$m^2 - x_3^2 = \varrho_3^2 (sn^2\omega' - sn^2\tau) =$$

$$= \frac{\varrho_3^2}{k}\frac{\Theta_1^2(\omega')\,\Theta^2(\tau) - \Theta^2(\omega')\,\Theta_1^2(\tau)}{\Theta^2(\omega')\,\Theta^2(\tau)} = \frac{\varrho_3^2}{k}\frac{\Theta^2(0)\,\Theta_1(\omega' + \tau)\,\Theta_1(\omega' - \tau)}{\Theta^2(\omega')\,\Theta^2(\tau)},$$

woraus folgt

$$\sqrt{m^2 - x_3^2} = D \cdot \frac{\sqrt{P}}{\Theta(\tau)}, \quad \text{wo } D = \frac{\varrho_3}{\sqrt{k}}\frac{\Theta(0)}{\Theta_3(i\omega)}, \qquad (38_2.)$$

so lassen sich die T_s-Funktionen (13.) folgendermaßen darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \frac{1}{2mD}\left[\frac{\Theta(\tau)}{\Theta_2(\tau+i\omega)}e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}+\frac{\Theta(\tau)}{\Theta_2(\tau-i\omega)}e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}\right];\\
T_1 &= \frac{1}{i}\frac{1}{2mD}\left[\frac{\Theta(\tau)}{\Theta_2(\tau+i\omega)}e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}-\frac{\Theta(\tau)}{\Theta_2(\tau-i\omega)}e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}\right];\\
T_2 &= \frac{D}{2m}\left[\frac{\Theta_2(\tau-i\omega)}{\Theta(\tau)}e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}+\frac{\Theta_2(\tau+i\omega)}{\Theta(\tau)}e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}\right];\\
T_3 &= \frac{1}{i}\frac{D}{2m}\left[\frac{\Theta_2(\tau-i\omega)}{\Theta(\tau)}e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}-\frac{\Theta_2(\tau+i\omega)}{\Theta(\tau)}e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (39.)$$

14. Setzen wir hier

$$S = x_2y_1 - x_1y_2 = \frac{1}{a}\frac{dx_3}{dt} = \frac{g_1\varrho_3}{a}\,cn\,\tau\,dn\,\tau\,, \qquad (40.)$$

so erhalten die Koordinaten Ξ, H des *Zentrums* des beweglichen Körpers die Werte

$$\left.\begin{aligned}
m\,\Xi &= n\varrho_3\,sn\,\tau\cdot T_1 - mST_0;\\
mH &= -n\varrho_3\,sn\,\tau\cdot T_0 - mST_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (40_1.)$$

Die dritte Koordinate Z erhalten wir wegen $(9_1.)$ aus

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{m}\left[a_{11}(x_1^2+x_2^2)+a_{33}x_3^2\right] = a_{11}m + \frac{c}{m}x_3^2,$$

oder nach Integration

$$Z = Z_0 + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 D_\tau \log\Theta(\tau), \qquad (40_2.)$$

wo

$$\nu_0 = \frac{c\varrho_3^2}{g_1 mk^3}\frac{\Theta'(g_2)}{\Theta(g_2)};\quad \nu_1 = a_{11}m + \frac{c\varrho_3^2}{mk^2}\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)};\quad \nu_2 = -\frac{c\varrho_3^2}{g_1 mk^2}. \qquad (40_3.)$$

Ferner können wir noch die Werte der beiden *Euler*schen Winkel ϑ und φ anfügen:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\vartheta &= \frac{\varrho_3}{m}\,sn\tau;\\
i\cdot\operatorname{tg}\varphi &= \frac{\Theta_2(\tau-i\omega)\,e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}-\Theta_2(\tau+i\omega)\,e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}}{\Theta^2(\tau-i\omega)\,e^{+i(\mu_1+\mu_2\tau)}+\Theta_2(\tau+i\omega)\,e^{-i(\mu_1+\mu_2\tau)}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (40_4.)$$

15. Könnte man nun den Wert des dritten *Euler*schen Winkels f ableiten, so ließe sich die vollständige Lösung des betreffenden Bewegungsproblemes mit Leichtigkeit durchführen.

Aus der letzten Gleichung von $(11_1.)$ ergibt sich nämlich

$$\frac{x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}}{x_1^2} = \frac{1}{\cos^2 f} \frac{df}{dt}, \text{ aber } \cos^2 f = \frac{x_1^2}{m^2 - x_3^2},$$

also

$$x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = (m^2 - x_3^2) \frac{df}{dt}.$$

Man hat aber die Identität:

$$(x_1 + i x_2) \left(\frac{dx_1}{dt} - i \frac{dx_2}{dt}\right) = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} - i \left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}\right),$$

woraus nach Division mit $(x_1 + i x_2)(x_1 - i x_2) = m^2 - x_3^2$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1 - i\,dx_2}{x_1 - i x_2} &= \frac{-x_3 dx_3}{m^2 - x_3^2} - i\,df, \\ \text{und also} \qquad & \\ x_1 - i x_2 &= B \sqrt{m^2 - x_3^2} \cdot e^{-if}; \\ x_1 + i x_2 &= B_1 \sqrt{m^2 - x_3^2} \cdot e^{+if}; \end{aligned}\right\} \qquad (41.)$$

wo die Integrationskonstanten B und B_1 konjugiert imaginär sind und der Bedingung $B B_1 = 1$ genügen.

Aus der Identität $(x_1 - i x_2)(y_1 + i y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + i (x_1 y_2 - x_2 y_1)$ würde man dann schließlich erhalten:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - i y_2 &= B \frac{n + iS}{\sqrt{m^2 - x_3^2}} \cdot e^{-if}; \\ y_1 + i y_2 &= B_1 \frac{n - iS}{\sqrt{m^2 - x_3^2}} \cdot e^{+if}. \end{aligned}\right\} \qquad (41_1.)$$

Indessen begegnet man großen Schwierigkeiten, wenn man den genauen Wert des Winkels f abzuleiten versucht; ja, vielleicht ist dies eben nicht möglich [s. Gl. $(45_3.)$], wenn man $y_{3,0} = 0$ oder $r_0 = \frac{a_{16}}{a_{11}} u_0$ als einzige beschränkende Bedingung für die Anfangsbewegung voraussetzt, was in dem partikulären Integrale $(25_2.)$ mit enthalten ist.

Fügt man noch $n = 0$ als Anfangsbedingung hinzu, d. h. $x_{1,0} y_{1,0} + x_{2,0} y_{2,0} = 0$, so läßt sich dagegen die Aufgabe, wie wir im folgenden zeigen wollen, ohne Schwierigkeit durch Quadraturen lösen.

16. Die Behandlung der übrigen Fälle, $(31_3.)$ und $(32.)_{\alpha'}$, u. s. w., vollzieht sich in etwa derselben Weise wie in dem oben untersuchten. Der einzige Unterschied ist der, daß die Veränderliche x_3 in diesen anderen Fällen etwas anders ausgedrückt wird; so z. B. in der Gleichung $(31_3.)$ durch die Funktion $cn\,\tau$, in $(32.)_{\alpha'}$ durch die Funktion $dn\,\tau$; bemerkens-

wert ist aber, daß sowohl der Winkel φ als auch die Hilfsgrößen T_s sich als Funktionen der Zeit ergeben, und zwar in derselben Form wie in dem schon behandelten Falle. Man hat nur die Größe τ etwas anders zu definieren; so wird man z. B. in dem Falle $(32.)_{a'}$ dem τ den Wert $g_1 t + g_2 - K$ geben, usw.

17. Wir gehen nun dazu über, die Formeln $(16_1.)$ und $(17_1.)$, (18.) und $(18_1.)$ auf den eben behandelten Fall anzuwenden.

Nach $(16_1.)$ ist

$$m^2 R^2 = n'' - \frac{c}{a} x_3^2, \text{ wo } n'' = \frac{L}{a} - n'^2 > 0,$$

und hieraus ergibt sich

$$R'' = R_{\max} = \frac{\sqrt{n''}}{m}; \qquad R' = R_{\min} = \frac{\sqrt{n'' - \frac{c}{a}\varrho_3^2}}{m}.$$

Das *Zentrum O* des Körpers bewegt sich also dauernd in dem Raume zwischen den beiden kreisförmigen Zylinderflächen, deren gemeinschaftliche Achse die $o\zeta$-Achse ist und deren Halbmesser R' und R'' sind; das *Zentrum* berührt hierbei wechselweise die beiden Zylinderflächen. Die Winkelentfernung zwischen zwei einander unmittelbar folgenden, in derselben Fläche liegenden Berührungspunkten ist $4\,\mu_2 K$, wie aus (17.) und (37.) hervorgeht. Während jedes dementsprechenden Intervalles $\Omega = \frac{4K}{g_1}$ erhält die Z-Koordinate von O einen Zuwachs von $\nu_1 \Omega$. Der Winkel ϑ zwischen der OZ-Achse und der $o\zeta$-Achse schwankt in der Weise, daß stets $-\frac{\varrho_3}{m} \leqq \cos\vartheta \leqq +\frac{\varrho_3}{m}$ ist.

Weil also die Z-Koordinate des *Zentrums O* und der Polarwinkel V stetig mit der Zeit wachsen, während der Radiusvektor immer Werte zwischen R' und R'' hat, ist es klar, daß der Körper sowohl eine um die ζ-Achse kreisende als auch eine von der $\xi\eta$-Ebene her fortschreitende Bewegung hat, sodaß die OZ-Achse um die im Raume feste ζ-Achse herumwandert. Währenddessen beschreibt das *Zentrum O* eine Art schraubenförmiger Bahn, die in ihrer ganzen Ausdehnung zwischen den oben angegebenen Zylinderflächen liegt.

Der Projektionspunkt O_1 des *Zentrums* auf die $\xi\eta$-Ebene bewegt sich währenddessen längs einer gewissen Kurve vierten Grades, die sich ihrerseits mit der periodischen Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ um ihren Mittel-

punkt o dreht. Wenn man in die aus (18.) abzuleitende Relation

$$n x_3 = m^2 R \cos U \cdot \sqrt{m^2 - x_3^2}$$

den Wert

$$x_3^2 = \frac{a}{c}(n'' - m^2 R^2)$$

einsetzt, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung jener Kurve vierten Grades, eben die Gleichung der sich drehenden Projektionskurve:

$$a(n^2 + m^4 R^2 \cos^2 U) R^2 + c m^2 \left(m^2 - \frac{a}{c} n''\right) R^2 \cos^2 U = a n'^2 n''. \qquad (42.)$$

Die Gleichungen der *Raumbahn* des *Zentrums O* bestehen aus (40_2.) und

$$\left.\begin{aligned} V &= -\varphi + \frac{1}{2i} \log \frac{n\varrho_3 sn\,\tau + iS}{n\varrho_3 sn\,\tau - iS}; \\ R &= \frac{1}{m}\sqrt{n'' - \frac{c}{a}\varrho_3^2 sn^2\,\tau}. \end{aligned}\right\} \qquad (42_1.)$$

Der Spezialfall $n = 0$.

18. Die Voraussetzung $n = 0$ bedeutet, daß die Anfangsbewegung des Körpers so gewählt werden soll, daß die Beziehung

$$u_0 p_0 + v_0 q_0 = 0 \qquad (43.)$$

zwischen den Anfangsgeschwindigkeiten stattfindet.

Dieser Bedingung, zusammen mit der schon vorher gemachten Beschränkung in der Bewegungsfreiheit

$$r_0 = \frac{a_{16}}{a_{11}} u_0, \qquad (43_1.)$$

kann auf mancherlei Weise genügt werden; so z. B. kann die Bewegung des Körpers (man *wirft* ihn z. B. in die Flüssigkeit) mit

1) nur Parallelverschiebung längs der OY-Achse und keiner Drehung;
2) „ „ „ „ OZ- „ „ „ „
3) Parallelverschiebung „ „ OZ- „ und Drehung um die OX-Achse
4) „ „ „ „ OZ- „ „ „ „ „ „ OY- „
5) „ „ „ „ OY- „ „ „ „ „ „ OX- „

usw.

anfangen.

Wir nehmen jetzt zuerst $n \leqslant 0$ an und berücksichtigen später den Wert $n = 0$.

Setzen wir

$$r = \sqrt{a(m^2 - x_3^2)(L - c x_3^2) - a^2 n^2}, \qquad (44.)$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf die letzte Gleichung in (26.) und das

mittlere Integral in (27.)

$$y_1 = \frac{n x_1 + \frac{r x_2}{a}}{m^2 - x_3^2}; \quad y_2 = \frac{n x_2 - \frac{r x_1}{a}}{m^2 - x_3^2} \tag{44$_1$.}$$

und weiter wegen des Systems (26.):

$$r(m^2 - x_3^2)\frac{dx_2}{dx_3} = b x_1^2 (m^2 - x_3^2) - a n x_1 x_3 - r x_2 x_3.$$

Führt man in diese Gleichung mittels der Gleichungen (7_1.) und (10_1.):

$$x_1 = m \cos f \sin \vartheta; \quad x_2 = m \sin f \sin \vartheta; \quad x_3 = m \cos \vartheta \tag{45.}$$

die *Euler*schen Winkel ϑ und f ein, so erhält man zuerst

$$\frac{dx_2}{dx_3} = -\sin f \cot \vartheta - \cos f \frac{df}{d\vartheta}, \tag{45$_1$.}$$

$$r = m\sqrt{ac} \cdot \sqrt{\sin^2 \vartheta \left(\frac{L}{c} - m^2 \cos^2 \vartheta\right) - \frac{a}{c} n'^2} \tag{45$_2$.}$$

und endlich:

$$\frac{df}{d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{a n' \cot \vartheta - b m \sin^2 \vartheta \cos f}{\sqrt{\sin^2 \vartheta \left(\frac{L}{c} - m^2 \cos^2 \vartheta\right) - \frac{a}{c} n'^2}}. \tag{45$_3$.}$$

Könnte man jetzt aus dieser Differentialgleichung den genäuen Ausdruck für den Winkel f ableiten, so hätte man auch, wie wir schon bemerkt haben, die vollständige Lösung des vorliegenden Bewegungsproblems unter der Voraussetzung der Anfangsbedingung $y_{3,0} = 0$ gefunden. Aber dieses Integral vollständig zu bestimmen, scheint mit großen Schwierigkeiten verbunden zu sein*).

Führt man dagegen auch die Bedingung $n = 0$ ein, so läßt sich die Integration unmittelbar ausführen.

19. Man erhält dann:

$$\int \frac{df}{\cos f} = -\sigma \int \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{l_1' - \cos^2 \vartheta}} + \text{konst.},$$

wenn man

$$\sigma = \frac{b}{\sqrt{ac}}; \quad l_1' = \frac{L}{cm^2} \tag{46.}$$

setzt. Wegen

$$\int \frac{df}{\cos f} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin f}{1 - \sin f} + \text{konst.},$$

*) Die Gleichung (45_3.) läßt sich in die Form einer *Riccati*schen transformieren.

$$\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta}} = \frac{1}{i}\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - l_1'}} = +i\log\left(\cos\vartheta + i\sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta}\right) + \text{konst.},$$

ergibt sich

$$\sin f = \frac{A\left\{\cos\vartheta + i\sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta}\right\}^{-2i\sigma} - 1}{A\left\{\cos\vartheta + i\sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta}\right\}^{-2i\sigma} + 1}, \tag{46$_1$.}$$

wo die Integrationskonstante A den Wert

$$A = \frac{1+\sin f_0}{1-\sin f_0}\left[\cos\vartheta_0 + i\sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta_0}\right]^{+2i\sigma} \tag{46$_2$.}$$

hat. — Das *Zeitintegral* erhält man hier aus der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = l_0\,(m^2 - x_3^2)\,(m^2 l_1' - x_3^2), \text{ wo } l_0 = a\,(a_{33} - a_{11}). \tag{47.}$$

20. Im Falle

I. $a_{33} > a_{11}$, d. h. $c > 0$ und $l_0 > 0$, muß notwendig $L > 0$ sein. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

a) $l_1' > 1$.

Wenn man der Gleichförmigkeit halber die Bezeichnungen einführt:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_3 = m; \quad \varrho_4 = \varrho_3\sqrt{l_1'}, \\ \text{wo} \quad &-\varrho_4 < -\varrho_3 \leqq x_3 \leqq +\varrho_3 < +\varrho_4, \end{aligned}\right\} \tag{48.}$$

und wenn man $x_3 = \varrho_3 \cdot s$ setzt, so erhält man wie in (34.) und (34$_1$.):

$$x_3 = \varrho_3\, sn\,\tau \tag{48$_1$.}$$

und außerdem

$$\cos\vartheta = sn\,\tau; \quad \sqrt{m^2 - x_3^2} = \varrho_3\, cn\,\tau; \quad \sqrt{l_1' - \cos^2\vartheta} = \frac{1}{k}\, dn\,\tau. \tag{48$_2$.}$$

Weiter findet man

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{konst.} \tag{49.}$$

und

$$T_0 = \frac{\cos\varphi_0}{\varrho_3^2}\,\frac{1}{cn\,\tau}; \quad T_1 = \frac{\sin\varphi_0}{\varrho_3^2}\,\frac{1}{cn\,\tau}; \quad T_2 = \cos\varphi_0 \cdot cn\,\tau; \quad T_3 = \sin\varphi_0 \cdot cn\,\tau \tag{49$_1$.}$$

und infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} &\Xi = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}\cos\varphi_0 \cdot dn\,\tau; \quad H = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}\sin\varphi_0 \cdot dn\,\tau \\ \text{und} \quad &Z = Z_0 + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 D_\tau \log\Theta(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{49$_2$.}$$

wo die Konstanten ν_0, ν_1, ν_2 Werte von der Form (40$_3$.) haben, nämlich

$$\nu_0 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{\Theta'(g_2)}{\Theta(g_2)}; \quad \nu_1 = a_{11}\varrho_3 + \frac{c}{k}\,\varrho_4\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}; \quad \nu_2 = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}. \tag{49$_3$.}$$

Weil nach (17$_1$.)

$$V = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \text{konst.} \tag{50.}$$

ist, so sieht man, daß die Bewegung die Eigenschaft hat, daß das *Zentrum O* des Körpers während des ganzen Bewegungsverlaufs in *einer und derselben Ebene bleibt*, nämlich in der, die durch die Anfangslage von O und durch die feste ζ-Achse geht. Und weil der Radiusvektor des Projektionspunktes O_1 den Wert

$$R = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot dn\,\tau \tag{50$_1$.}$$

hat, woraus sich

$$R_{\max} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}; \quad R_{\min} = \frac{k'}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}$$

ergibt, so folgt, daß das *Zentrum* sich zwischen zwei zueinander und zu der $o\zeta$-Achse parallelen Geraden bewegt, die um $\frac{1-k'}{k}\sqrt{\frac{c}{a}}$ voneinander entfernt sind und wechselweise von der Bahn des *Zentrums* berührt werden.

Die Geschwindigkeitskomponenten des Körpers ergeben sich unmittelbar aus den Integralen (41.) und (41$_1$.), nachdem man darin den in (46$_1$.) berechneten Wert des Winkels f eingeführt hat. Man findet

$$\left.\begin{aligned} u - iv &= B\ cn\,\tau \cdot e^{-if}; \\ u + iv &= B'\, cn\,\tau \cdot e^{+if}; \\ w &= a_{33} \cdot \varrho_3\, sn\,\tau; \end{aligned}\right\} \tag{51.}$$

$$\left.\begin{aligned} p - iq &= C\ dn\,\tau \cdot e^{-if}; \\ p + iq &= C'\, dn\,\tau \cdot e^{+if}; \\ r &= \frac{a_{16}}{a_{11}}\, u, \end{aligned}\right\} \tag{51$_1$.}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} B = \frac{u_0 - iv_0}{cn\,g_2}\, e^{+if_0};\ B' = \frac{u_0 + iv_0}{cn\,g_2}\, e^{-if_0};\ C = \frac{p_0 - iq_0}{dn\,g_2}\, e^{+if_0}; \\ C' = \frac{p_0 + iq_0}{dn\,g_2}\, e^{-if_0}. \end{aligned}\right\} \tag{51$_2$.}$$

Die einzige der Geschwindigkeitskomponenten, die eine periodische Funktion der Zeit ist, ist also w mit der Periode $\Omega = \frac{4k}{g_1}$.

Der Wert des Winkels f soll hier berechnet werden aus der Gleichung

$$\sin f = \frac{A\left(sn\,\tau + \frac{i}{k}\,dn\,\tau\right)^{-2i\sigma} - 1}{A\left(sn\,\tau + \frac{i}{k}\,dn\,\tau\right)^{-2i\sigma} + 1}, \text{ wo } A = \frac{1 - \sin f_0}{1 + \sin f_0}\left(sng_2 + \frac{i}{k}\,dng_2\right)^{+2i\sigma}; \tag{52.}$$

die beiden anderen *Euler*schen Winkel sind durch die Gleichungen

$$\varphi = \varphi_0, \quad \cos\vartheta = sn\,\tau \qquad (52_1.)$$

gegeben; ϑ ist also eine periodische Funktion der Zeit mit der Periode Ω.

b) $l_1' < 1$.

Diese Annahme bedeutet nur, daß die Rangordnung der Wurzeln ϱ_3 und ϱ_4 vertauscht wird, so daß man die Bedingung

$$-\varrho_3 < -\varrho_4 \leqq x_3 \leqq +\varrho_4 < +\varrho_3$$

erhält, und dem entspricht eine Lösung von derselben Form wie die soeben abgeleitete.

c) $l_1' = 1$.

Diese Voraussetzung ergibt eine Gleichung $cm^2 = L = l - a_{11}m^2$ zwischen den Integrationskonstanten l und m, d. h. sie hat noch eine dritte Beschränkung bezüglich der Freiheit der Anfangsbewegung zur Folge; daher unterlassen wir die Behandlung dieses Falles.

II. $a_{33} < a_{11}$, d. h. $l_0 < 0$; $\lambda_0 = -l_0 = ac' > 0$, wo $c' = a_{11} - a_{33}$; das *Zeitintegral* wird definiert durch die Gleichung

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = +\lambda_0(\varrho_3^2 - x_3^2)(\varrho_4^2 + x_3^2), \text{ wo } \varrho_3 = m;\ \varrho_4 = \varrho_3\sqrt{l_1''};\ l_1'' = \frac{L}{c'm^2}. \qquad (53.)$$

Weil hier $c = a_{33} - a_{11} < 0$ ist, können zwei Möglichkeiten eintreten: $L > 0$ oder $L < 0$.

A) $L > 0$.

Wenn wir die Differentialgleichung (53.) durch die Substitution

$$x_3 = \varrho_3\sqrt{1 - s^2}$$

transformieren, so erhalten wir

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = g_1 t + g_2 = \tau,$$

$$k = \frac{\varrho_3}{\sqrt{\varrho_3^2 + \varrho_4^2}};\quad g_1 = -\sqrt{\lambda_0(\varrho_3^2 + \varrho_4^2)};$$

$$g_2 = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}};\quad s_0 = \frac{\sqrt{\varrho_3^2 - x_{3,0}^2}}{\varrho_3}, \qquad (53_1.)$$

woraus $-1 < s_0 < +1$ folgt, und alle eingehenden Größen werden also *reell*. Jetzt ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \varrho_3\, cn\,\tau \\ \text{und} \qquad \cos\vartheta &= cn\,\tau;\quad \sqrt{m^2 - x_3^2} = \varrho_3\, sn\,\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (53_2.)$$

Der *Euler*sche Winkel f wird in diesem Falle gegeben durch die Gleichung

$$\frac{df}{\cos f} = -\sigma' \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l_1'' + \cos^2\vartheta}}, \quad \text{wo } \sigma' = \frac{b}{\sqrt{b\,c'}} = \text{eine } \textit{reelle} \text{ Größe;}$$

oder nach Integration:

$$\sin f = \frac{A(\cos\vartheta + \sqrt{l_1'' + \cos^2\vartheta})^{2\sigma'} - 1}{A(\cos\vartheta + \sqrt{l_1'' + \cos^2\vartheta})^{2\sigma'} + 1},$$

wo die Integrationskonstante A den Wert

$$A = \frac{1 + \sin f_0}{1 - \sin f_0}(\cos\vartheta_0 + \sqrt{l_1'' + \cos^2\vartheta})^{-2\sigma'}$$

hat.

Nun findet man aber $\sqrt{l_1'' + \cos^2\vartheta} = \frac{1}{k}\, dn\,\tau$, woraus folgt

$$\sin f = \frac{A\left(cn\,\tau + \frac{1}{k}\, dn\,\tau\right)^{2\sigma'} - 1}{A\left(cn\,\tau + \frac{1}{k}\, dn\,\tau\right)^{2\sigma'} + 1}, \quad \text{wo } A = \frac{1 + \sin f_0}{1 - \sin f_0}\left(cn\,g_2 + \frac{1}{k}\, dn\,g_2\right)^{2\sigma'}. \tag{54.}$$

Weiter erhält man

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{\cos\varphi_0}{\varrho_3^2}\,\frac{1}{sn\,\tau}; & T_1 &= \frac{\sin\varphi_0}{\varrho_3^2}\,\frac{1}{sn\,\tau}; \\ T_2 &= \cos\varphi_0 \cdot sn\,\tau; & T_3 &= \sin\varphi_0 \cdot sn\,\tau \end{aligned}\right\} \tag{55.}$$

und infolgedessen:

$$\Xi = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c'}{a}}\cos\varphi_0 \cdot dn\,\tau; \quad H = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c'}{a}}\sin\varphi_0 \cdot dn\,\tau; \tag{56.}$$

und außerdem

$$Z = Z_0 + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 D_\tau \log\Theta(\tau), \tag{56$_1$.}$$

wo

$$\nu_0 = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c'}{a}} \cdot \frac{\Theta'(g_2)}{\Theta(g_2)}; \quad \nu_1 = a_{11}\varrho_3 + \frac{c'\varrho_3}{k^2}\,\frac{\Theta_3''(0)}{\Theta_3(0)}; \quad \nu_2 = +\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c'}{a}}. \tag{56$_2$.}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} u - iv &= B\,sn\,\tau \cdot e^{-if}; \\ u + iv &= B'\,sn\,\tau \cdot e^{+if}; \\ w &= a_{33}\varrho_3\, cn\,\tau; \end{aligned}\right\} \tag{57.}$$

$$\left.\begin{aligned} p - iq &= iC\,dn\,\tau \cdot e^{-if}; \\ p + iq &= -iC'\,dn\,\tau \cdot e^{+if}; \\ r &= \frac{a_{16}}{a_{11}}\,u, \end{aligned}\right\} \tag{57$_1$.}$$

wo

$$B = \frac{u_0 - iv_0}{sn\, g_2} e^{+it_0}; \quad B' = \frac{u_0 + iv_0}{sn\, g_2} e^{-it_0};$$

$$C = \frac{p_0 - iq_0}{dn\, g_2} e^{+it_0}; \quad C' = -\frac{p_0 + iq_0}{dn\, g_2} e^{-it_0}. \quad (57_2.)$$

Der Bewegungsverlauf ist in diesem Falle von derselben Art wie in dem zuletzt behandelten.

B) $L < 0$.

Wenn wir $L' = -L > 0$ setzen, so wird das *Zeitintegral* durch die Gleichung

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = -\lambda_0 (\varrho_3^2 - x_3^2)(\varrho_4^2 - x_3^2) \quad (58.)$$

bestimmt, wo

$$\varrho_4 = \varrho_3 \sqrt{l_1''}; \quad l_1'' = \frac{L}{c' m^2} > 0 \quad (58_1.)$$

ist, und man hat zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

a) $l_1'' > 1$.

Diese Annahme hat $x_3^2 \leqq \varrho_3^2 < \varrho_4^2$ zur Folge, und *es kann keine Bewegung stattfinden.*

b) $l_1'' < 1$.

Dann muß $\varrho_4^2 < x_3^2 < \varrho_3^2$ sein, und mittels der Substitution

$$x_3 = \frac{\varrho_4}{\sqrt{1 - k^2 s^2}}; \quad k = \frac{\sqrt{\varrho_3^2 - \varrho_4^2}}{\varrho_3} < 1, \; k' = \frac{\varrho_4}{\varrho_3} \quad (58_2.)$$

bringt man die Differentialgleichung in die Form

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} = g_1 t + g_2, \quad (59.)$$

wo

$$g_1 = \varrho_3 \sqrt{\lambda_0}; \quad g_2 = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}}, \quad (59_1.)$$

d. h. eine *reelle* Größe ist.

Setzt man hier

$$\tau = g_1 t + g_2 - K, \quad (59_2.)$$

so erhält man

$$x_3 = \frac{\varrho_4}{dn(\tau + K)} = \varrho_3\, dn\, \tau; \quad \cos\vartheta = dn\, \tau; \quad \sqrt{m^2 - x_3^2} = \varrho_3 k \cdot sn\, \tau. \quad (59_3.)$$

Zur Bestimmung des Winkels f ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{df}{\cos f} = -\sigma' \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - l_1'}},$$

woraus

$$\sin f = \frac{A(\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - l_1''})^{2\sigma'} - 1}{A(\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - l_1''})^{2\sigma'} + 1} = \frac{A(dn\,\tau + k\,cn\,\tau)^{2\sigma'} - 1}{A(dn\,\tau + k\,cn\,\tau)^{2\sigma'} + 1}, \qquad (60.)$$

wo die Integrationskonstante

$$A = \frac{1 + \sin f_0}{1 - \sin f_0} \cdot (dn\,g_2 + k\,cn\,g_2)^{-2\sigma'} \qquad (60_1).$$

ist. Weil weiter

$$T_0 = \frac{\cos\varphi_0}{k\varrho_3^2}\,\frac{1}{sn\,\tau};\quad T_1 = \frac{\sin\varphi_0}{k\varrho_3^2}\,\frac{1}{sn\,\tau};\quad T_2 = k\cos\varphi_0 \cdot sn\,\tau;\quad T_3 = k\sin\varphi_0 \cdot sn\,\tau \qquad (61.)$$

ist, ergibt sich

$$\Xi = k\sqrt{\frac{c'}{a}}\cos\varphi_0 \cdot cn\,\tau;\quad H = k\sqrt{\frac{c'}{a}}\sin\varphi_0 \cdot cn\,\tau \qquad (61_1.)$$

und endlich

$$Z = Z_0 + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 D_\tau \log\Theta(\tau), \qquad (61_2.)$$

wo $\nu_0 = \sqrt{\frac{c'}{a}}\left[\frac{\Theta'(g_2)}{\Theta(g_2)} - \frac{\Theta_2''(0)}{\Theta_2(0)} \cdot K\right];\quad \nu_1 = a_{11}\varrho_3 + c'\varrho_3\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)};\quad \nu_2 = -\sqrt{\frac{c'}{a}}$ $(61_3.)$

ist, während die Geschwindigkeitskomponenten sich aus Gleichungen der Form (57.) — (57_2.) ergeben.

Die Integration der Bewegungsgleichungen in den übrigen Fällen läßt sich in ähnlicher Weise ausführen und gibt Ergebnisse von derselben Art wie in den oben behandelten Fällen.

II. Die Bewegung in Flüssigkeiten von Körpern mit einer einzigen Symmetrieebene.

21. Wählt man die Symmetrieebene des Körpers als $X'Z'$-Ebene, so sieht der Ausdruck der lebendigen Kraft folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} 2T' = {} & a_{11}'x_1'^2 + 2a_{13}'x_1'x_3' + 2a_{15}'x_1'y_2' + a_{22}'x_2'^2 + 2a_{24}'x_2'y_1' + 2a_{26}'x_2'y_3' + a_{33}'x_3'^2 \\ & + 2a_{35}'x_3'y_2' + a_{44}'y_1'^2 + 2a_{46}'y_1'y_3' + a_{55}'y_2'^2 + a_{66}'y_3'^2. \end{aligned} \qquad (62.)$$

Wir machen jetzt über die Form und die Massenverteilung des Körpers solche Voraussetzungen, daß die Konstanten $a_{\lambda\mu}'$ den *folgenden vier Bedingungen genügen:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}' &= a_{22}' + \varepsilon(2a_{26}' + \varepsilon a_{66}');\\ a_{13}' &= -\varepsilon(a_{24}' + \varepsilon a_{46}');\\ a_{15}' &= -(a_{24}' + \varepsilon a_{46}');\\ a_{55}' &= a_{44}', \end{aligned}\right\} \qquad (62_1.)$$

wo

$$\varepsilon = \frac{a_{35}'}{a_{44}'}. \qquad (62_2.)$$

Den dann entstehenden Energieausdruck

$$\left.\begin{aligned} 2T' = {} & [a'_{22}+\varepsilon(2a'_{26}+\varepsilon a'_{66})]x_1'^2 - 2\varepsilon(a'_{24}+\varepsilon a'_{46})x'_1x'_3 - 2(a'_{24}+\varepsilon a'_{46})x'_1y'_2 + a'_{22}x_2'^2 \\ & + 2a'_{24}x'_2y'_1 + 2a'_{26}x'_2y'_3 + a'_{33}x_3'^2 + 2\varepsilon a'_{44}x'_3y'_2 + a'_{44}(y_1'^2+y_2'^2) + 2a'_{46}y'_1y'_3 + a'_{66}y_3'^2 \end{aligned}\right\} \quad (63.)$$

transformieren wir, indem wir das Koordinatensystem $O'X'Y'Z'$ in der $X'Z'$-Ebene parallel mit sich selbst verschieben, bis der Ursprung in die neue Lage O mit den Koordinaten

$$x'_0 = -\varepsilon;\quad y'_0 = 0;\quad z'_0 = -\frac{a'_{24}+\varepsilon a'_{46}}{a'_{44}} \qquad (63_1.)$$

kommt.

Die Transformationsformeln lauten sodann nach $(22_1.)$:

$$\left.\begin{aligned} & x'_1 = x_1;\quad x'_2 = x_2;\quad x'_3 = x_3; \\ & y'_1 = z'_0x_2 + y_1;\quad y'_2 = -\varepsilon x_3 - z'_0x_1 + y_2;\quad y'_3 = +\varepsilon x_2 + y_3, \end{aligned}\right\} \quad (63_2.)$$

und der Energieausdruck nimmt die vereinfachte Gestalt an:

$$2T = a(x_1^2+x_2^2) + bx_3^2 + 2cx_2y_3 + a_1(y_1^2+y_2^2) + 2b_1y_1y_3 + c_1y_3^2, \qquad (64.)$$

$$\left.\begin{aligned} & \text{wo } a = a'_{22}+\varepsilon(2a'_{26}+\varepsilon a'_{66})+2(a'_{24}+\varepsilon a'_{46})z'_0+a'_{44}z_0'^2 = a'_{22}+\varepsilon(2a'_{26}+\varepsilon a'_{66})+(a'_{24}+\varepsilon a'_{46})z'_0; \\ & b = a'_{33}-\varepsilon^2a'_{44};\quad c = a'_{26}+a'_{46}z'_0+\varepsilon a'_{66};\quad a_1 = a'_{44};\quad b_1 = a'_{46};\quad c_1 = a'_{66}. \end{aligned}\right\} \quad (64_1.)$$

Man erhält

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial x_1} = ax_1; && \frac{\partial T}{\partial x_2} = ax_2+cy_3; && \frac{\partial T}{\partial x_3} = bx_3; \\ & \frac{\partial T}{\partial y_1} = a_1y_1+b_1y_3; && \frac{\partial T}{\partial y_2} = a_1y_2; && \frac{\partial T}{\partial y_3} = cx_2+b_1y_1+c_1y_3, \end{aligned}\right\} \quad (64_2.)$$

und die Bewegungsgleichungen werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -cx_2^2 - b_1x_2y_1 + a_1x_3y_2 - c_1x_2y_3; \\ \frac{dx_2}{dt} &= +cx_1x_2 + b_1x_1y_1 + c_1x_1y_3 - a_1x_3y_1 - b_1x_3y_3; \\ \frac{dx_3}{dt} &= +a_1(x_2y_1 - x_1y_2) + b_1x_2y_3; \end{aligned}\right\} \quad (65.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= +(a-b)x_2x_3 - cx_2y_2 + cx_3y_3 - b_1y_1y_2 + (a_1-c_1)y_2y_3; \\ \frac{dy_2}{dt} &= -(a-b)x_1x_3 + cx_2y_1 + b_1y_1^2 - (a_1-c_1)y_1y_3 - b_1y_3^2; \\ \frac{dy_3}{dt} &= (-cx_1 + b_1y_2)y_3. \end{aligned}\right\} \quad (65_1.)$$

Die Differentialgleichungen haben das *partikuläre Integral*

$$y_3 = 0 \qquad (65_2.)$$

und lassen sich daher in diesem Spezialfalle folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -cx_2^2 - b_1 x_2 y_1 + a_1 x_3 y_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= +cx_1 x_2 + b_1 x_1 y_1 - a_1 x_3 y_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2); \end{aligned}\right\} \tag{66.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= +(a-b) x_2 x_3 - c x_2 y_2 - b_1 y_1 y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} &= -(a-b) x_1 x_3 + c x_2 y_1 + b_1 y_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{66$_1$.}$$

Von diesen beiden letzten Systemen findet man die folgenden vier Integrale:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= m^2; \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 &= n; \\ -(a-b) x_3^2 + a_1 (y_1^2 + y_2^2) &= l - a m^2 = L; \\ \int \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} &= t + \text{konst.}, \end{aligned}\right\} \tag{66$_2$.}$$

wo $R(x_3) = l_0 (m^2 - x_3^2)(M + x_3^2) - a_1^2 n^2$; $l_0 = a_1 (a-b)$; $M = \frac{L}{a-b}$. (66$_3$.)

22. Ohne auf irgendeine nähere Diskussion dieses letzten Integrales einzugehen, was ähnlich geschehen könnte wie bei (28.), wollen wir nur bemerken, daß man auch in dem vorliegenden Rotationsprobleme die Koordinaten des *Zentrums* des Körpers als Funktionen der Zeit darstellen kann. Man findet

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a_1 m n}{m^2 - x_3^2}, \tag{67.}$$

und nachdem man aus dem obigen Integral den Wert von x_3 abgeleitet hat, erhält man nacheinander $T_0, \ldots T_3$ und Ξ, H. Die dritte Koordinate ergibt sich aus der Gleichung

$$Z = Z_0 + \frac{m}{a} - \frac{a-b}{m} \int_0^t x_3^2 \, dt. \tag{68.}$$

Die Koordinaten des *Zentrums O* können also auch hier unter der in (39.) — (40$_2$.) angegebenen Form erhalten werden. Ebenso findet man den Wert des Winkels ϑ aus

$$\cos \vartheta = \frac{x_3}{m}, \tag{69.}$$

während die Berechnung des *Eulers*chen Winkels f, wenn $n \gtrless 0$ ist, die-

selben Schwierigkeiten wie in dem schon behandelten Falle darbietet, da f gegeben wird durch die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} -r\frac{df}{d\vartheta} &= cm^2\sin^2\vartheta\sin f + \frac{b_1}{a_1}r\sin f + n(b_1\cos f - a_1\cot\vartheta), \\ \text{wo} \qquad r &= m\sqrt{l_0\sin^2\vartheta\,(M+m^2\cos^2\vartheta) - a_1 n'^2}. \end{aligned}\right\} \quad (70.)$$

Wenn man dagegen die Anfangsbewegung durch die Annahme $n=0$ einschränkt, so kann man auch in dem vorliegenden Probleme den Winkel f unmittelbar als eine Funktion der Zeit ausdrücken.

Der Fall $n=0$.

23. Die Voraussetzung $n=0$ bedeutet in dem vorliegenden Bewegungsprobleme, daß die Anfangsgeschwindigkeiten des Körpers nur solche Werte erhalten, die mit den gleichzeitig geltenden Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} u_0 p_0 + v_0 q_0 &= 0, \\ r_0 &= \frac{c}{a}v_0 + \frac{b_1}{a_1}p_0 \end{aligned}\right\} \quad (71.)$$

in Einklang sind.

Diesen Bedingungen kann man auf mancherlei Art genügen, z. B. wenn der Anfang der Bewegung ist

1.) nur Parallelverschiebung längs der OX-Achse, ohne irgend eine Drehung,
2.) „ „ „ „ OZ-Achse, „ „ „ „
3.) „ „ „ „ OZ-Achse, und Drehung um die OY-Achse, usw.

Wenn man die Bezeichnungen:

$$m' = \frac{M}{m^2}; \quad \sigma = \frac{c}{\sqrt{a_1(a-b)}}; \quad \sigma' = \frac{b_1}{a_1} \quad (72.)$$

einführt, so erhält mán wegen (70.):

$$-\frac{df}{\sin f} = \sigma\cdot\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{m'+\cos^2\vartheta}} + \sigma'\cdot d\vartheta$$

und nach Integration

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos f}{1-\cos f} = -\sigma\log\{\cos\vartheta + \sqrt{m'+\cos^2\vartheta}\} + \sigma'\cdot\vartheta + \text{konst.},$$

woraus

$$\cos f = \frac{A\cdot e^{2\sigma'\cdot\vartheta} - [\cos\vartheta + \sqrt{m'+\cos^2\vartheta}]^{2\sigma}}{A\cdot e^{2\sigma'\cdot\vartheta} + [\cos\vartheta + \sqrt{m'+\cos^2\vartheta}]^{2\sigma}} \quad (72_1.)$$

folgt; die Integrationskonstante A hat den Wert

$$A = \frac{1+\cos f_0}{1-\cos f_0}\left[\cos\vartheta_0 + \sqrt{m' + \cos^2\vartheta_0}\right]^{2\sigma} \cdot e^{-2\sigma'\cdot\vartheta_0}. \qquad (72_2.)$$

Nachdem man hieraus mit Hilfe der Formel $(72_1.)$ den Wert des Winkels f_0 berechnet hat, erhält man die Geschwindigkeitskomponenten des Körpers aus Gleichungen der Form (41.) und $(41_1.)$. Die Rechnung im einzelnen ist der im vorigen Falle durchgeführten ähnlich.

III. Die Bewegung in Flüssigkeiten von Körpern ohne irgend eine Symmetrieebene.

24. Wir wollen endlich die Bewegungsgleichungen für Körper untersuchen, die jeder Symmetrieebene ermangeln, und gehen zu diesem Zweck von einem Energieausdrucke der allgemeinen Form (20.) aus, nur mit dem Unterschiede, daß wir anfänglich die in den Ausdruck der lebendigen Kraft eingehenden Buchstaben mit a'', x'', y'' bezeichnen wollen, so daß

$$2''T = a''_{11}x''^2_1 + 2a''_{12}x''_1x''_2 + 2a''_{13}x''_2x''_3 + 2a''_{14}x''_1y''_1 + \cdots \text{ usw.} \qquad (73.)$$

ist, wobei dieser Ausdruck sich auf ein mit dem beweglichen Körper fest vereinigtes Koordinatensystem $O''X''Y''Z''$ beziehen soll, dessen Achsen mit denen des vorher benutzten, im Körper festen Systems $O'X'Y'Z'$ Winkel bilden, deren Cosinus wir $\alpha''_\nu, \beta''_\nu, \gamma''_\nu$ nennen. Dann transformieren wir den Ausdruck (73.) mittels Relationen der Form (22.) und $(22_1.)$:

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= x'_1, & x''_2 &= x'_2; & x''_3 &= x'_3 \\ y''_1 &= z''_0x'_2 - y''_0x'_3 + \alpha''_1y'_1 + \alpha''_2y'_2 + \alpha''_3y'_3; \\ y''_2 &= x''_0x'_3 - z''_0x'_1 + \beta''_1y'_1 + \beta''_2y'_2 + \beta''_3y'_3; \\ y''_3 &= y''_0x'_1 - x''_0x'_2 + \gamma''_1y'_1 + \gamma''_2y'_2 + \gamma''_3y'_3, \end{aligned}\right\} \qquad (74.)$$

wo $-x''_0, -y''_0, -z''_0$ die Koordinaten des Ursprungs O' in dem Systeme $O''X''Y''Z''$ sind.

Die Konstanten $a'_{\lambda\mu}$ des durch die Transformation entstehenden Energieausdruckes $2T'(a'_{\lambda\mu}, x'_i, y'_i)$ werden mit den Konstanten $a''_{\lambda\mu}, x''_0, y''_0, z''_0, \alpha''_\nu, \beta''_\nu, \gamma''_\nu$ durch Relationen von der Form $(22_2.)$ verknüpft, und durch zweckmäßige Konstantenbestimmungen, d. h. durch die Verschiebung des Koordinatensystemes $O''X''Y''Z''$ in eine zweckmäßige Lage $O'X'Y'Z'$, kann man es erreichen, daß die Koeffizienten $a'_{\lambda\mu}$ Werte annehmen, die gewissen, im voraus gegebenen, Bedingungsgleichungen genügen, wodurch der Energieausdruck $2T'$ vereinfacht wird und eine zweckentsprechende Form erhält.

25. Bei der Transformation des Koordinatensystemes $O''X''Y''Z''$

wollen wir zuerst die Richtungen der neuen Achsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ festlegen, und wir tun dies in einer solchen Weise, daß man

$$a'_{45} = 0; \quad a'_{46} = 0 \tag{75.}$$

oder

$$(a''_{44}\alpha''_1 + a''_{45}\beta''_1 + a''_{46}\gamma''_1)\alpha''_2 + (a''_{45}\alpha''_1 + a''_{55}\beta''_1 + a''_{56}\gamma''_1)\beta''_2 + (a''_{46}\alpha''_1 + a''_{56}\beta''_1 + a''_{66}\gamma''_1)\gamma''_2 = 0;$$
$$(a''_{44}\alpha''_1 + a''_{45}\beta''_1 + a''_{46}\gamma''_1)\alpha''_3 + (a''_{45}\alpha''_1 + a''_{55}\beta''_1 + a''_{56}\gamma''_1)\beta''_3 + (a''_{46}\alpha''_1 + a''_{56}\beta''_1 + a''_{66}\gamma''_1)\gamma''_3 = 0$$

erhält.

Wenn man jetzt diese beiden Gleichungen mit bzw.

1.) α''_3 und α''_2; 2.) β''_3 und β''_2; 3.) γ''_3 und γ''_2

multipliziert, so erhält man nach Subtraktion der linken Seiten und mit Anwendung zwischen Richtungscosinus geltender Relationen:

$$1.) \quad -\frac{a''_{46}}{a''_{56}}\alpha''_1\beta''_1 + \frac{a''_{45}}{a''_{56}}\alpha''_1\gamma''_1 - \beta''^2_1 + \frac{a''_{55} - a''_{66}}{a''_{56}}\beta''_1\gamma''_1 + \gamma''^2_1 = 0; \tag{76.}$$

$$2.) \quad +\alpha''^2_1 + \frac{a''_{56}}{a''_{46}}\alpha''_1\beta''_1 + \frac{a''_{66} - a''_{44}}{a''_{46}}\alpha''_1\gamma''_1 - \frac{a''_{45}}{a''_{46}}\beta''_1\gamma''_1 - \gamma''^2_1 = 0; \tag{76_1.}$$

$$3.) \quad -\alpha''^2_1 + \frac{a''_{44} - a''_{55}}{a''_{45}}\alpha''_1\beta''_1 - \frac{a''_{56}}{a''_{45}}\alpha''_1\gamma''_1 + \beta''^2_1 + \frac{a''_{46}}{a''_{45}}\beta''_1\gamma''_1 = 0. \tag{76_2.}$$

Durch Addition der Gleichungen (76.) und (76_1.) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \gamma''_1 &= \frac{\alpha''^2_1 - \beta''^2_1 + a'_1\alpha''_1\beta''_1}{a''_1\alpha''_1 - a'''_1\beta''_1}, \\ \text{wo} \qquad a'_1 &= \frac{a''_{56}}{a''_{45}} - \frac{a''_{46}}{a''_{56}}; \quad a''_1 = \frac{a''_{44} - a''_{66}}{a''_{46}} - \frac{a''_{45}}{a''_{56}}; \quad a'''_1 = \frac{a''_{55} - a''_{66}}{a''_{56}} - \frac{a''_{45}}{a''_{46}} \end{aligned}\right\} \tag{77.}$$

ist, und wenn man alle drei Gleichungen (76.) — (76_2.) addiert, erhält man

$$\left(\frac{a''_{44} - a''_{55}}{a''_{45}} + a'_1\right)\alpha''_1\beta''_1 - \left(\frac{a''_{56}}{a''_{45}} + a''_1\right)\alpha''_1\gamma''_1 + \left(\frac{a''_{46}}{a''_{45}} + a'''_1\right)\beta''_1\gamma''_1 = 0.$$

Wenn man hier den Wert von γ''_1 einführt, so erhält man für das Verhältnis $\frac{\alpha''_1}{\beta''_1}$ die Gleichung

$$b'_1\left(\frac{\alpha''_1}{\beta''_1}\right)^3 + (a'_1b''_1 - a''_1b'_1 - b'''_1)\left(\frac{\alpha''_1}{\beta''_1}\right)^2 + (a'''_1b'_1 - a'_1b'''_1 - b''_1)\frac{\alpha''_1}{\beta''_1} + b'''_1 = 0, \tag{78.}$$

wo b'_1, b''_1, b'''_1 folgende Bedeutung haben:

$$b'_1 = \frac{a''_{44} - a''_{55}}{a''_{45}}; \qquad b''_1 = \frac{a''_{56}}{a''_{45}} + a''_1; \qquad b'''_1 = \frac{a''_{46}}{a''_{45}} + a'''_1. \tag{78_1.}$$

Aus der Gleichung (78.) findet man wenigstens einen *reellen* Wert

des Quotienten $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$, und bezeichnet man einen solchen mit $\varkappa$, so findet man nach (77.)

$$\gamma_1'' = \varkappa' \beta_1'', \text{ wo } \varkappa' = \frac{\varkappa^2 + a_1' \varkappa - 1}{a_1'' \varkappa - a_1'''}; \tag{79.}$$

und weiter, wegen $\alpha_1''^2 + \beta_1''^2 + \gamma_1''^2 = 1$,

$$\alpha_1'' = \frac{\varkappa}{\pm \sqrt{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + 1}}; \quad \beta_1'' = \frac{1}{\pm \sqrt{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + 1}}; \quad \gamma_1'' = \frac{\varkappa'}{\pm \sqrt{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + 1}}. \tag{79$_1$.}$$

Nachdem wir also die Werte der Richtungscosinus $\alpha_1'', \beta_1'', \gamma_1''$ berechnet haben, bestimmen wir $\alpha_2'', \beta_2'', \gamma_2''$ und legen dabei die Bedingung

$$a_{55}' = a_{44}' \tag{80.}$$

zugrunde. Man hat

$$a_{44}' = a_{44}'' \alpha_1''^2 + a_{55}'' \beta_1''^2 + a_{66}'' \gamma_1''^2 + 2(a_{45}'' \alpha_1'' \beta_1'' + a_{46}'' \alpha_1'' \gamma_1'' + a_{56}'' \beta_1'' \gamma_1''),$$

und a_{44}' ist folglich als eine bekannte Größe anzusehen, die man schreiben kann:

$$a_{44}' = \frac{a_{44}'' \varkappa^2 + a_{55}'' + a_{66}'' \varkappa'^2 + 2(a_{45}'' \varkappa + a_{46}'' \varkappa \varkappa' + a_{56}'' \varkappa')}{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + 1}. \tag{80$_1$.}$$

Man hat weiter:

$$a_{55}' = a_{44}'' \alpha_2''^2 + a_{55}'' \beta_2''^2 + a_{66}'' \gamma_2''^2 + 2(a_{45}'' \alpha_2'' \beta_2'' + a_{46}'' \alpha_2'' \gamma_2'' + a_{56}'' \beta_2'' \gamma_2'')$$

und außerdem die Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha_2''^2 + \beta_2''^2 + \gamma_2''^2 &= 1; \\ \alpha_1'' \alpha_2'' + \beta_1'' \beta_2'' + \gamma_1'' \gamma_2'' &= 0; \end{aligned} \tag{81.}$$

die letzte kann man auch schreiben:

$$\varkappa \alpha_2'' + \beta_2'' + \varkappa' \gamma_2'' = 0. \tag{81$_1$.}$$

Gibt man der Bedingung (80.) die Form

$$a_{44}'' \alpha_2''^2 + a_{55}'' \beta_2''^2 + a_{66}'' \gamma_2''^2 + 2(a_{45}'' \alpha_2'' \beta_2'' + a_{46}'' \alpha_2'' \gamma_2'' + a_{56}'' \beta_2'' \gamma_2'') = a_{44}'(\alpha_2''^2 + \beta_2''^2 + \gamma_2''^2),$$

so findet man

$$(a_{44}'' - a_{44}') \left(\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right)^2 + 2a_{46}'' \frac{\alpha_2''}{\beta_2''} \cdot \frac{\gamma_2''}{\beta_2''} + 2a_{45}'' \frac{\alpha_2''}{\beta_2''} + (a_{66}'' - a_{44}') \left(\frac{\gamma_2''}{\beta_2''}\right)^2 +$$

$$+ 2a_{56}'' \frac{\gamma_2''}{\beta_2''} + a_{55}'' - a_{44}' = 0,$$

aber nach (81$_1$.) ist

$$\frac{\gamma_2''}{\beta_2''} = -\frac{\varkappa}{\varkappa'} \cdot \frac{\alpha_2''}{\beta_2''} - \frac{1}{\varkappa'}, \tag{81$_2$.}$$

und man erhält also den Quotienten $\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}$ als eine Wurzel der Gleichung

$$\left(\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right)^2 - 2\varkappa_1\left(\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right) + \varkappa_1' = 0, \tag{82.}$$

wo

$$\varkappa_1 = -\frac{a_{45}'' - \frac{a_{46}''}{\varkappa'} - \frac{\varkappa}{\varkappa'}a_{56}'' + \frac{\varkappa}{\varkappa'^2}(a_{66}'' - a_{44}')}{a_{44}'' - a_{44}' - 2\frac{\varkappa}{\varkappa'}a_{46}'' + \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}(a_{66}'' - a_{44}'')}; \quad \varkappa_1' = \frac{a_{55}'' - a_{44}' - 2\frac{a_{56}''}{\varkappa'} + \frac{1}{\varkappa'^2}(a_{66}'' - a_{44}')}{a_{44}'' - a_{44}' - 2\frac{\varkappa}{\varkappa'}a_{46}'' + \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}(a_{66}'' - a_{44}')} \tag{82$_1$.}$$

ist, und es ergibt sich

$$\frac{\alpha_2''}{\beta_2''} = \varkappa_1 \pm \sqrt{\varkappa_1^2 - \varkappa_1'}, \tag{82$_2$.}$$

wo wir die *Annahme machen*, daß die Diskriminante $\varkappa_1^2 - \varkappa_1' \geqq 0$ ist.

Führen wir jetzt die Bezeichnungen

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 \pm \sqrt{\varkappa_1^2 - \varkappa_1'}; \quad \varkappa_2' = -\frac{\varkappa}{\varkappa'}\varkappa_2 - \frac{1}{\varkappa'} \tag{83.}$$

ein, so erhalten wir aus (81$_2$.), (82$_2$.) und (81.)

$$\alpha_2'' = \frac{\varkappa_2}{\pm\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_2'^2 + 1}}; \quad \beta_2'' = \frac{1}{\pm\sqrt{\varkappa^2 + \varkappa_2'^2 + 1}}; \quad \gamma_2'' = \frac{\varkappa_2'}{\pm\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_2'^2 + 1}}. \tag{83$_1$.}$$

Hieraus folgt außerdem, daß die Werte der Richtungscosinus α_3'', β_3'', γ_3'' als bekannte Größen anzusehen sind.

Wir haben also bewiesen, daß die Richtungen der Koordinatenachsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ sich so bestimmen lassen, daß die Gleichungen

$$a_{45}' = 0; \quad a_{46}' = 0; \quad a_{55}' = a_{44}' \tag{84.}$$

identisch befriedigt werden, wenn nur die Konstanten $a_{\lambda\mu}''$ des ursprünglichen Energieausdruckes der Bedingung

$$\varkappa_1^2 \geqq \varkappa_1' \tag{84$_1$.}$$

genügen.

26. Endlich hat man die Koordinaten x_0'', y_0'', z_0'' des neuen Ursprungs O' zu bestimmen, und diese Bestimmung suchen wir so auszuführen, daß die Gleichungen

$$a_{35}' = 0; \quad a_{14}' - a_{25}' = 0; \quad a_{15}' + a_{24}' + \varepsilon a_{56}' = 0, \quad \varepsilon = \frac{a_{34}'}{a_{44}'} \tag{85.}$$

identisch erfüllt werden.

Die hier eingehende Konstante a_{56}' ist wegen

$$\begin{aligned} a_{56}' = {} & (a_{44}''\alpha_3'' + a_{45}''\beta_3'' + a_{46}''\gamma_3'')\alpha_2'' + (a_{45}''\alpha_3'' + a_{55}''\beta_3'' + a_{56}''\gamma_3'')\beta_2'' \\ & + (a_{46}''\alpha_3'' + a_{56}''\beta_3'' + a_{66}''\gamma_3'')\gamma_2'' \end{aligned} \tag{85$_1$.}$$

eine bekannte Größe. Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} a'_{14} &= A\alpha''_1 + B\beta''_1 + C\gamma''_1; & a'_{15} &= A\alpha''_2 + B\beta''_2 + C\gamma''_2;\\ a'_{24} &= A'\alpha''_1 + B'\beta''_1 + C'\gamma''_1; & a'_{25} &= A'\alpha''_2 + B'\beta''_2 + C'\gamma''_2;\\ a'_{34} &= A''\alpha''_1 + B''\beta''_1 + C''\gamma''_1; & a'_{35} &= A''\alpha''_2 + B''\beta''_2 + C''\gamma''_2 \end{aligned}\right\} \quad (86.)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= a''_{14} + a''_{46}y''_0 - a''_{45}z''_0; & B &= a''_{15} + a''_{56}y''_0 - a''_{55}z''_0; & C &= a''_{16} + a''_{66}y''_0 - a''_{56}z''_0;\\ A' &= a''_{24} - a''_{46}x''_0 + a''_{44}z''_0; & B' &= a''_{25} - a''_{56}x''_0 + a''_{45}z''_0; & C' &= a''_{26} - a''_{66}x''_0 + a''_{46}z''_0;\\ A'' &= a''_{34} + a''_{45}x''_0 - a''_{44}y''_0; & B'' &= a''_{35} + a''_{55}x''_0 - a''_{45}y''_0; & C'' &= a''_{36} + a''_{56}x''_0 - a''_{46}y''_0. \end{aligned}$$

Die zwei ersten der Gleichungen (85.) nebst der letzten

$$a'_{15} + a'_{24} + \frac{a'_{56}}{a'_{44}} \cdot a'_{34} = 0$$

kann man in der Form schreiben:

$$A''\alpha''_2 + B''\beta''_2 + C''\gamma''_2 = 0;$$

$$A\alpha''_1 + B\beta''_1 + C\gamma''_1 - (A'\alpha''_2 + B'\beta''_2 + C'\gamma''_2) = 0;$$

$$A\alpha''_2 + B\beta''_2 + C\gamma''_2 + A'\alpha''_1 + B'\beta''_1 + C'\gamma''_1 + \frac{a'_{56}}{a'_{44}}(A''\alpha''_1 + B''\beta''_1 + C''\gamma''_1) = 0;$$

und man erhält für die Berechnung der Koordinaten x''_0, y''_0, z''_0 das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A_1x''_0 + B_1y''_0 - D_1 &= 0;\\ A_2x''_0 + B_2y''_0 + C_2z''_0 - D_2 &= 0;\\ A_3x''_0 + B_3y''_0 + C_3z''_0 - D_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (87.)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a''_{45}\alpha''_2 + a''_{55}\beta''_2 + a''_{56}\gamma''_2; & B_1 &= -(a''_{44}\alpha''_2 + a''_{45}\beta''_2 + a''_{46}\gamma''_2);\\ & & D_1 &= -(a''_{34}\alpha''_2 + a''_{35}\beta''_2 + a''_{36}\gamma''_2),\\ A_2 &= a''_{46}\alpha''_2 + a''_{56}\beta''_2 + a''_{66}\gamma''_2; & B_2 &= a''_{46}\alpha''_1 + a''_{56}\beta''_1 + a''_{66}\gamma''_1;\\ C_2 &= -(a''_{45}\alpha''_1 + a''_{55}\beta''_1 + a''_{56}\gamma''_1) - (a''_{44}\alpha''_2 + a''_{45}\beta''_2 + a''_{46}\gamma''_2);\\ D_2 &= -(a''_{14}\alpha''_1 + a''_{15}\beta''_1 + a''_{16}\gamma''_1) + (a''_{24}\alpha''_2 + a''_{25}\beta''_2 + a''_{26}\gamma''_2);\\ A_3 &= \frac{a'_{56}}{a'_{44}}(\alpha''_{45}\alpha''_1 + a''_{55}\beta''_1 + a''_{56}\gamma''_1) - (a''_{46}\alpha''_1 + a''_{56}\beta''_1 + a''_{66}\gamma''_1);\\ B_3 &= -\frac{a'_{56}}{a'_{44}}(a''_{44}\alpha''_1 + a''_{45}\beta''_1 + a''_{46}\gamma''_1) + (a''_{46}\alpha''_2 + a''_{56}\beta''_2 + a''_{66}\gamma''_2);\\ C_3 &= +(a''_{44}\alpha''_1 + a''_{45}\beta''_1 + a''_{46}\gamma''_1) - (a''_{45}\alpha''_2 + a''_{55}\beta''_2 + a''_{56}\gamma''_2);\\ D_3 &= -(a''_{24}\alpha''_1 + a''_{25}\beta''_1 + a''_{26}\gamma''_1) - (a''_{14}\alpha''_2 + a''_{15}\beta''_2 + a''_{16}\gamma''_2)\\ & & & - \frac{a'_{56}}{a'_{44}}(a''_{34}\alpha''_1 + a''_{35}\beta''_1 + a''_{36}\gamma''_1). \end{aligned}\right\} \quad (87_1.)$$

Hieraus ergeben sich endlich als Werte der Koordinaten x''_0, y''_0, z''_0 des neuen Ursprungs O':

$$\frac{x_0''}{\Delta_1} = \frac{y_0''}{\Delta_2} = \frac{z_0''}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta}, \tag{87$_2$.}$$

wo

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} A_1 & 0 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}. \tag{87$_3$.}$$

Wir haben also bewiesen, daß man unter der einzigen Voraussetzung (84$_1$.) eine Verschiebung des Koordinatensystemes $O''\,X''\,Y''\,Z''$ in die Lage $O'\,X'\,Y'\,Z'$ so ausführen kann, daß die Relationen (84.) und (85.) identisch befriedigt werden; der Ausdruck der lebendigen Kraft nimmt dabei die einfachere Form an:

$$\left.\begin{aligned} 2T = a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + 2a'_{13}x'_1x'_3 + 2a'_{25}x'_1y'_1 - 2(a'_{24}+\varepsilon a'_{56})x'_1y'_2 + 2a'_{16}x'_1y'_3 + \\ + a'_{22}x_2'^2 \quad + 2a'_{23}x'_2x'_3 + 2a'_{24}x'_2y'_1 + 2a'_{25}x'_2y'_2 \quad + 2a'_{26}x'_2y'_3 + \\ + a'_{33}x_3'^2 \quad + 2\varepsilon a'_{44}x'_3y'_1 \quad + 2a'_{36}x'_3y'_3 + \\ + \quad a'_{44}(y_1'^2+y_2'^2) \quad + 2a'_{56}y'_2y'_3 + \\ + \quad a'_{66}y_3'^2. \end{aligned}\right\} \tag{88.}$$

27. Wir machen nun bezüglich der Konstanten $a'_{\lambda\mu}$ des Energieausdruckes die einschränkende Voraussetzung, daß sie, *außer der Bedingung* (84$_1$.) *den vier folgenden Bedingungen genügen:*

$$a'_{11} = a'_{22} - \varepsilon(2a'_{16} + \varepsilon a'_{66}); \quad a'_{12} = -\varepsilon a'_{26}; \quad a'_{13} = \varepsilon(a'_{25} - a'_{36}); \quad a'_{23} = \varepsilon a'_{24}. \tag{88$_1$.}$$

Der dann entstehende Ausdruck läßt sich außerdem dadurch vereinfachen, daß das Koordinatensystem $O'\,X'\,Y'\,Z'$ seinerseits einer zweckmäßigen Transformation unterworfen wird. Wir verschieben das System in der $Y'\,Z'$-Ebene parallel zu sich selbst, bis der Ursprung O' in den Punkt $O\left(0, \varepsilon, -\frac{a'_{24}}{a'_{44}}\right)$ fällt und das System die Lage $O\,X\,Y\,Z$ einnimmt.

Die Transformationsformeln lauten

$$\left.\begin{aligned} x'_1 = x_1; \quad x'_2 = x_2; \quad x'_3 = x_3; \\ y'_0 = z'_0x_2 - \varepsilon x_3 + y_1; \quad y'_2 = -z'_0x_1 + y_2; \quad y'_3 = +\varepsilon x_1 + y_3, \text{ wo } z'_0 = -\frac{a'_{24}}{a'_{44}}; \end{aligned}\right\} \tag{89.}$$

und der schließliche Energieausdruck erhält das Aussehen

$$\left.\begin{aligned} 2T = a(x_1^2+x_2^2) + bx_3^2 + 2b'(x_1y_1 + x_2y_2) + 2b''x_1y_3 + 2cx_2y_3 + 2c'x_3y_3 + \\ + a_1(y_1^2+y_2^2) + 2b_1y_2y_3 + c_1y_3^2, \end{aligned}\right\} \tag{89$_1$.}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a = a'_{22} + 2a'_{24}z'_0 + a'_{44}z_0'^2 = a'_{22} + a'_{24}z_0; \quad b = a'_{33} - \varepsilon^2 a'_{44}; \\ b' = a'_{25}; \quad b'' = a'_{16} - a'_{56}z'_0 + \varepsilon a'_{66}; \\ c = a'_{26}; \quad c' = a'_{36}; \quad a_1 = a'_{44}; \quad b_1 = a'_{56}; \quad c_1 = a'_{66}. \end{aligned}\right\} \tag{89$_2$.}$$

Der allgemeine Ausdruck der lebendigen Kraft läßt sich folglich auf die reduzierte Form (89_1.) bringen, wenn es nur zwischen den 21 Konstanten des Ausdrucks *fünf beschränkende Relationen der Form* (84_1.) *und* (88_1.) gibt.

Es ist bemerkenswert, daß die Gleichungen für die *Raumbahn* des endlich festgestellten Ursprunges, des *Zentrums O*, auch in dem vorliegenden Falle erhalten werden können, der eine Verallgemeinerung des vorher behandelten über die Bewegung von Körpern mit *zwei Symmetrieebenen* ist. Um diesen letzten Fall zu erreichen, hat man $b' = c = c' = b_1 = 0$ zu setzen.

28. Wegen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x_1} = a x_1 + b' y_1 + b'' y_3;\quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = a x_2 + b' y_2 + c y_3;\quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = b x_3 + c' y_3; \\ &\frac{\partial T}{\partial y_1} = b' x_1 + a_1 y_1;\quad \frac{\partial T}{\partial y_2} = b' c_2 + a_1 y_2 + b_1 y_3;\quad \frac{\partial T}{\partial y_3} = b'' x_1 + c x_2 + c' x_3 + b_1 y_2 + c_1 y_3 \end{aligned}\right\} \quad (90.)$$

werden die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -b'' x_1 x_2 - c x_2^2 + (b' - c') x_2 x_3 - b_1 x_2 y_2 + a_1 x_3 y_2 - c_1 x_2 y_3 + b_1 x_3 y_3; \\ \frac{dx_2}{dt} &= + b'' x_1^2 + c x_1 x_2 - (b' - c') x_1 x_3 + b_1 x_1 y_2 + c_1 x_1 y_3 - a_1 x_3 y_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= + a_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) - b_1 x_1 y_3; \end{aligned}\right\} \quad (90_1.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= + (a - b) x_2 x_3 - b'' x_1 y_2 - c x_2 y_2 - c' x_2 y_3 + (b' - c') x_3 y_2 + b' x_2 y_3 \\ &\qquad + c x_3 y_3 - b_1 y_2^2 + (a_1 - c_1) y_2 y_3 + b_1 y_3^2; \\ \frac{dy_2}{dt} &= - (a - b) x_1 x_3 + b'' x_1 y_1 + c x_2 y_1 - (b' - c') (x_1 y_3 + x_3 y_1) - b'' x_3 y_3 \\ &\qquad + b_1 y_1 y_2 - (a_1 - c_1) y_1 y_3; \\ \frac{dy_3}{dt} &= (- c x_1 + b'' x_2 - b_1 y_1) y_3. \end{aligned}\right\} \quad (90_2.)$$

Die letzte Gleichung hat das *partikuläre Integral*

$$y_3 = 0, \quad (91.)$$

und in diesem Spezialfalle nehmen die übrigen Differentialgleichungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= - b'' x_1 x_2 - c x_2^2 + (b' - c') x_2 x_3 - b_1 x_2 y_2 + a_1 x_3 y_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= + b'' x_1^2 + c x_1 x_2 - (b' - c') x_1 x_3 + b_1 x_1 y_2 - a_1 x_3 y_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2); \end{aligned}\right\} \quad (91_1.)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= +(a-b)x_2x_3 - b''x_1y_2 - cx_2y_2 + (b'-c')x_3y_2 - b_1y_2^2;\\ \frac{dy_2}{dt} &= -(a-b)x_1x_3 + b''x_1y_1 + cx_2y_1 - (b'-c')x_3y_1 + b_1y_1y_2.\end{aligned}\right\} \quad (91_2.)$$

Diese Differentialgleichungen haben die algebraischen Integrale:

$$\left.\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= m^2;\\ x_1y_1 + x_2y_2 &= n;\\ a_1(y_1^2 + y_2^2) &= L + (a-b)x_3^2,\ L = l - am^2 - 2b'n\end{aligned}\right\} \quad (92.)$$

und außerdem ein transzendentes Integral, das der Gleichung

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = a_1(a-b)(m^2 - x_3^2)\left(\frac{L}{a-b} + x_3^2\right) - a_1^2n^2 \qquad (92_1.)$$

genügt.

29. Zur Bestimmung des *Euler*schen Winkels φ erhält man hier die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = b'm + \frac{a_1mn}{m^2 - x_3^2}, \qquad (93.)$$

und φ läßt sich als eine Funktion der Zeit darstellen, und zwar in einer (37.) ähnlichen Form, woraus die T_s-Funktionen sich in der Gestalt (39.) ergeben. Sodann findet man, daß die Koordinaten Ξ, H des *Zentrums* O des Körpers Ausdrücke erhalten, die den in $(40_1.)$ angegebenen ähnlich sind, während die Z-Koordinate durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$Z = Z_0 + (am + \frac{n}{m}b')t - \int_0^t x_3^2\,dt. \qquad (94.)$$

Die Bewegung von O wird in dem vorliegenden Falle ähnlich wie in D I.

Den *Euler*schen Winkel ϑ erhält man in derselben Form wie vorher, und der Winkel f wird durch die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}-r\frac{df}{d\vartheta} &= m^2\sin^2\vartheta[b''\cos f + c\sin f - (b'-c')\cot\vartheta] +\\ &\quad + n[b_1\sin f - a_1\cot\vartheta] - \frac{b_1}{a_1}\cdot r\cos f,\end{aligned}\right\} \quad (95.)$$

bestimmt, wo

$$r = m\sqrt{a_1(a-b)}\sqrt{\sin^2\vartheta\left[\frac{L}{a-b} + m^2\cos^2\vartheta\right] - \frac{a_1}{a-b}n'^2}.$$

Ohne auf die Behandlung der Differentialgleichungen des vorliegenden Bewegungsproblemes oder die Untersuchung des Bewegungsverlaufs des Körpers näher einzugehen, deren Hauptzüge in dem allgemeinen Falle $n \gtrless 0$ schon angegeben sind, wollen wir etwas bei der Annahme $n = 0$ verweilen.

In den vorher behandelten Fällen wird die Bewegung für $n = 0$ dadurch charakterisiert, daß die Bahn des *Zentrums* O eine ebene und im Raume feste ist. Diese Eigenschaft besitzt die Bewegung dagegen nicht in dem jetzigen Falle, wie leicht zu zeigen ist. Bemerkenswert ist, daß man in *geschlossener* Form die Polargleichung für die Bahn des Projektionspunktes O_1 in der $\xi\eta$-Ebene erhalten kann.

Nach (93.) und (17_1.) ist

$$\varphi = \varphi_0 + b' m \cdot t; \quad V + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

sodaß

$$V = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - b' m \cdot t \tag{96.}$$

folgt. Weiter ist

$$m^2 R^2 = \frac{L}{a_1} + \frac{a-b}{a_1} x_3^2;$$

aber aus der Gleichung (92_1.) läßt sich die Veränderliche x_3 durch irgendeine der Funktionen $sn\,\tau$, $cn\,\tau$ oder $dn\,\tau$ ausdrücken. Wenn wir z. B. bei der ersten Möglichkeit bleiben, d. h. wenn $x_3 = \varrho\, sn\,\tau = \varrho\, sn\,(g_1 t + g_2)$ ist, so erhalten wir

$$R^2 = \lambda + \lambda'\, sn^2\,[\lambda_1\,(V - \lambda_1')]\,, \tag{97.}$$

wo die Konstanten folgende Werte haben:

$$\lambda = \frac{L}{m^2 a_1}; \quad \lambda' = \frac{a-b}{a_1}\,\frac{\varrho^2}{m^2}; \quad \lambda_1 = \frac{g_1}{b' m}; \quad \lambda_1' = V_0 + b' m\,\frac{g_2}{g_1}. \tag{97_1.}$$

Hieraus ersieht man, daß das *Zentrum* des Körpers für $n = 0$ sich nicht wie in den entsprechenden früheren Fällen in einer festen Ebene bewegt, sondern statt dessen eine doppelt gekrümmte Bahn beschreibt, die in dem Raume zwischen den beiden Kreiszylinderflächen gelegen ist, welche die $o\zeta$-Achse als gemeinsame Achse haben und deren Halbmesser bezw. $\sqrt{\lambda}$ und $\sqrt{\lambda + \lambda'}$ sind.

Die Gleichung (97.) für die Bahn des Projektionspunktes O_1 zeigt, daß diese nicht algebraischer, sondern transzendenter Natur ist. Auch kann diese Bahn nicht durch eine andere ersetzt werden, die von algebraischer Art ist, aber um den festen Ursprung rotiert.

Literatur.

Köpke, A.: Zur Diskussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, Mathem. Annalen, B. 12, S. 387—403.

Weber, H.: Anwendung der Thetafunktionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Mathem. Annalen, B. 14 (1878), S. 173—207.

Minkowski: Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Sitzungsberichte der Berl. Akademie, 1888, S. 1095.

Kötter, Fr.: Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Dieses Journal, B. 109, 1892, S. 51—111.

„ „ Die von *Steklow* und *Liapunow* entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Sitzungsberichte der Berl. Akademie, 1900.

Steklows Abhandlung: Siehe Mathem. Annalen, B. 42, 1893, S. 273—74.

Liapunows „ „ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathem., B. 25, 1897, S. 1501.

Tschaplygin, S.: Ein neuer besonderer Fall der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Arbeiten d. physikalischen Sektion d. Kaiserl. Gesellsch. d. Freunde d. Naturkunde. Anthropologie u. Ethnographie, (russisch) Moskwa, Lief. 1, 1903.

Kolossoff, G.: On some cases of motion of a solid in infinite liquid. American Journal of Mathematics, B. XXVIII, numb. 4, 1906.

Halphen: Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Liouvilles Journal, B. 4, 1888.

Greenhill, A. G.: The motion of a solid in infinite liquid under no forces. American J. of Mathem., B. XX, S. 1—75.

„ „ The motion of a solid in infinite liquid. B. XXVIII, S. 71—158, 1906.

Craig, Th.: On the motion of a solid in a fluid. American J. of Mathem., B. II, S. 162—177, 1879.

„ „ On the motion of an ellipsoid in a fluid. Ibidem, S. 260—280.

Lamb, H.: Hydro-dynamics. Chapter VI, Cambridge, 1895.

Larmor, J.: On hydro-kinetic symmetry. Quarterl. Journal of Mathematics, S. 261, 1884.

Miss *Fawcett:* Note on the motion of solids in a liquid. Quarterl. J., S. 231—258, 1893.

Bryan: A hydrodynamical proof of the equations of motion of a perforated solid, ... Phil. Mag., ser. 5, 1893.

Basset: On the motion of two spheres in a liquid and allied problems. London Mathem. Soc. Proc., 1887, S. 369—377.

Fennel: Über die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit. Inaug.-Diss., Marburg 1888, Progr. Cassel.

Sundberg, E.: Rotationskroppars Hydrodynamik. Inaug.-Diss., Upsala, 1887.

Abhandlungen des Verfassers:

Über die Bewegung symmetrisch schraubenförmiger Körper in Flüssigkeiten. Archiv f. Mathematik, Astronomie u. Physik der K. Akademie der Wissenschaften zu Stockholm, B. 1, 1904.

Om rörelse i vätskor hos en grupp fasta kroppar med tre symmetriplan. Ibidem, B. 5, 1908.

Partikulära integraler till differentialekvationerna för fasta kroppars rörelse i vätskor, I, II, III. Ibidem, B. 8 (1913); B. 9 (1914); B. 10 (1915).

Über die multiplikative Darstellung von algebraischen Zahlen eines *Galois*schen Zahlkörpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers.

Von Herrn *Tonio Rella* in Wien.

Einleitung.

Herr *Hensel* hat in drei in diesem Journal kürzlich erschienenen Abhandlungen*) für die algebraischen Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers für den Bereich eines Primteilers $\mathfrak{p}$ eine multiplikative Darstellung angegeben und die Resultate der Theorie zur Begründung einer vollständigen Theorie der Potenzreste für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul und ferner zu einer Erweiterung des *Legendre*schen Symbols**) angewendet. Im folgenden wird diese Theorie mit der *Hilbert*schen Theorie der *Galois*schen Zahlkörper in Verbindung gebracht, woraus sich eine Reihe von Resultaten ergibt, welche für die Behandlung *Kummer*scher und relativ *Abel*-

*) *K. Hensel*, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. Journ. f. Math. Bd. 146, S. 189—215 (im folgenden zitiert mit H I).

K. Hensel, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul. Journ. f. Math. Bd. 146, S. 216—228 (zitiert mit H II).

K. Hensel, Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern. Journ. f. Math. Bd. 147, S. 1—15 (zitiert mit H III).

**) *K. Hensel*, Die Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symbols für allgemeine algebraische Körper. Journ. f. Math. Bd. 147, S. 233—248.

scher Körper von Bedeutung sind. In dieser Arbeit werden im ersten Abschnitt jene Sätze aus den *Henselschen* Arbeiten kurz zusammengestellt, welche im folgenden gebraucht werden und wegen deren Beweis ich auf die Originalabhandlungen verweise, im zweiten Abschnitt werden zuerst die im folgenden gebrauchten Sätze aus der Theorie der *Galois*schen Zahlkörper angeführt und hierauf jener Teil der Theorie entwickelt, welcher sich auf die Trägheitsgruppe bezieht, eine zweite Mitteilung endlich wird Fragen aus der Theorie der Verzweigungsgruppen behandeln.

1.

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, in welchem die natürliche Primzahl p die Zerlegung erfährt

$$p = \mathfrak{p}^e \mathfrak{q},$$

wobei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ teilerfremdes Ideal bedeutet; die Norm von $\mathfrak{p}$ sei p^f, dann heißt e die Ordnung, f der Grad des Primideals (Primteilers) $\mathfrak{p}$.

π sei eine durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare Zahl von k, eine „Primzahl" des Körpers $k(\mathfrak{p})$.

Den Gegenstand der Untersuchung bilden die π-adischen Zahlen des Körpers k, das ist der Inbegriff der Potenzreihen

$$\alpha = \alpha_0 \pi^a + \alpha_1 \pi^{a+1} + \alpha_2 \pi^{a+2} + \cdots, \tag{1.}$$

wobei $\alpha_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, und die Zahl Null. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bedeuten dabei gewöhnliche ganze oder solche gebrochenen algebraischen Zahlen von k, deren Nenner zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist. Gleich heißen zwei π-adische Zahlen, wenn sie nach jeder noch so hohen Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent sind. a bedeutet eine ganze rationale Zahl und heißt die Ordnung von α. Ist $a = 0$, so heißt α eine Einheit, ist a positiv (negativ), so heißt α ganz (gebrochen). Die Zahl Null erscheint als π-adische Zahl von unendlich hoher positiver Ordnung. Wird mit diesen Zahlen nach den formalen Rechengesetzen für Potenzreihen gerechnet, so ergeben sich als Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier π-adischer Zahlen mit Ausnahme der Division durch Null wieder π-adische Zahlen; die π-adischen Zahlen bilden daher einen Körper, welcher mit $k(\mathfrak{p})$ bezeichnet werden soll. Wird als Grundkörper k der natürliche Rationalitätsbereich

angenommen und $\pi = p$ gesetzt, so heißen die analog definierten Zahlen rationale p-adische Zahlen*).

Im Körper $k(\mathfrak{p})$ existieren p^f-1 $(p^f-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln $\omega_1, \ldots \omega_{p^f-1}$; ist speziell keine niedrigere Potenz von ω gleich 1 als die p^f-1te, so heißt ω eine primitive p^f-1te Einheitswurzel; es erscheinen sämtliche p^f-1ten Einheitswurzeln in der Gestalt

$$\omega^i,\ i = 0, 1, \ldots p^f - 2,$$

und die Zahlen $0, 1, \omega, \ldots \omega^{p^f-2}$ bilden ein vollständiges Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{p}$, und zwar für viele Untersuchungen das bequemste. In der Darstellung (1.) kann wegen $\alpha_0 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$

$$\alpha_0 \equiv \omega^g\,(\mathfrak{p})$$

gesetzt werden, und es ergibt sich für jede von Null verschiedene Zahl α die Darstellung

$$\alpha = \pi^a \omega^g \varepsilon. \tag{2.}$$

Dabei ist a die Ordnung von α, g heißt der Index von α (dieser ist nur mod $p^f - 1$ bestimmt und hängt von der Wahl von ω ab; wird eine andere primitive Einheitswurzel zugrunde gelegt, so multipliziert sich der Index mit einer zu $p^f - 1$ teilerfremden Zahl) und $\varepsilon \equiv 1\,(\mathfrak{p})$ wird als Einseinheit bezeichnet.

Eine Einheit ε heißt vom k^{ten} Grad, wenn $\varepsilon \equiv 1\,(\mathfrak{p}^k)$, dagegen $\varepsilon \not\equiv 1\,(\mathfrak{p}^{k+1})$. Zwei Einheiten k^{ten} Grades heißen äquivalent, wenn sie mod $\mathfrak{p}^{k+1}$ kongruent sind (H I, S. 196).

Herr *Hensel* hat nun für die Einseinheiten und dadurch für alle von Null verschiedenen π-adischen Zahlen eine multiplikative Darstellung gefunden, deren Hauptpunkte im folgenden in wenig geänderter Fassung angeführt werden, damit leichter darauf verwiesen werden kann.

Folgende Bezeichnungen werden dauernd festgehalten werden:

e die Ordnung, f der Grad von $\mathfrak{p}$, ω eine bestimmt ausgewählte primitive $p^f - 1^{\text{te}}$ Einheitswurzel, $r = \left[\frac{e}{p-1}\right]$ die größte in $\frac{e}{p-1}$ enthaltene ganze Zahl; im irregulären Fall, der unter 3) erklärt werden wird, setzen

---

*) Vergl. hierzu *K. Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen. Teubner, 1908, wo die Theorie der p-adischen Zahlen systematisch entwickelt wird.

wir stets $e = e_0 p^n (p-1) = e_1 p^n$, wobei e_0 eine zu p teilerfremde Zahl bedeutet; Einseinheiten sollen mit ε und η bezeichnet werden, der erste angehängte Index bedeutet immer den Grad der Einheit; eventuell unter den Einseinheiten vorkommende Einheitswurzeln werden mit ζ bezeichnet.

1) Sämtliche Einseinheiten von $k(\mathfrak{p})$ bilden einen Strahl.

2) m Einheiten k^{ten} Grades $\varepsilon_{k,1}, \varepsilon_{k,2}, \dots \varepsilon_{k,m}$ heißen unabhängig, wenn aus $\varepsilon_{k,1}^{c_1} \varepsilon_{k,2}^{c_2} \dots \varepsilon_{k,m}^{c_m} \equiv 1 \ (\mathfrak{p}^{k+1})$, wobei $0 \leqq c_i < p$ ist, $c_1 = c_2 = - - = c_m = 0$ folgt; es gibt f und nur f unabhängige Einheiten jedes Grades k, durch sie läßt sich mod $\mathfrak{p}^{k+1}$ jede Einheit k^{ten} Grades multiplikativ darstellen (mit Koeffizienten aus der Reihe $0, 1, \dots p-1$); solche f unabhängige Einheiten k^{ten} Grades heißen eine Basis für den Grad k (H I, S. 197, 198).

3) Ist $-p \equiv \pi^e \omega^g \ (\mathfrak{p}^{e+1})$, so enthält der Körper $k(\mathfrak{p})$ dann und nur dann primitive p^{te} Einheitswurzeln, wenn e und g gleichzeitig durch $p-1$ teilbar sind; dieser Fall werde der irreguläre Fall genannt; liegt er nicht vor, so sprechen wir vom regulären Fall.

4) Ist ε_j eine Einheit vom Grade j und k die kleinste natürliche Zahl oder Null, für welche $jp^k > r$ ausfällt, so ist $\varepsilon_j^{p^s}$ für $s = 1, 2, \dots k, k+1, \dots k+i, \dots$ im regulären Fall und im irregulären Fall, wenn $j \not\equiv e_0 p^m \ (m \leqq n)$ stets respektive vom Grade $pj, p^2 j, \dots p^k j, p^k j + e, \dots p^k j + ie$ (H I, S. 198—201 und H II, S. 2); im irregulären Fall sei $j = e_0 p^m \ (m \leqq n)$; wegen $r = e_0 p^n$ folgt aus $jp^k > r$, $k = n - m + 1$; dann ist zwar stets $\varepsilon_j^{p^s}$ für $s = 1, \dots n-m$ vom Grade $e_0 p^{m+1}, \dots e_0 p^n = r$, dagegen gibt es im irregulären Fall stets Einheiten $\varepsilon_j = \varepsilon_{e_0 p^m}$, für welche $\varepsilon_j^{p^{n-m+1}}$ von höherem Grad als $e_0 p^{n+1} = r + e$ ausfällt; solche Einheiten heißen irregulär, p^{n-m+1} heißt der Irregularitätsexponent; ist $\varepsilon_j^{p^{n-m+1}}$ vom Grade h, so heißt h der Irregularitätsgrad von ε_j (H III, S. 2—3).

5) Bilden $\eta_{j,1}, \dots \eta_{j,f}$ eine Basis für den Grad $j \not\equiv 0 (p)$ und ist k der kleinste Exponent, für welchen $jp^k > r$ ausfällt, so bilden im regulären Fall und im irregulären Fall, wenn $j \not\equiv e_0$ ist, $\eta_{j,1}^{p^s}, \dots \eta_{j,f}^{p^s}$ für $s = 1, 2, \dots k, k+1, \dots k+i, \dots$ je eine Basis für den Grad $pj, p^2 j, \dots p^k j, p^k j + e, \dots p^k j + ie, \dots$ (H I, S. 201—202); liegt der irreguläre Fall vor, so kann eine Basis für den Grad $e_0 \eta_{e_0,1}, \eta_{e_0,2}, \dots \eta_{e_0,f}$ so gewählt werden, daß sie aus einer irregulären ($\eta_{e_0,f}$) und $f-1$ regulären Einheiten besteht;

dann bilden $\eta_{e_0,1}^{p^s}, \dots \eta_{e_0,f}^{p^s}$ für $s = 1, 2, \dots n$ je eine Basis für den Grad $e_0 p, \dots e_0 p^n$, dagegen ist $\eta_{e_0,f}^{p^{n+1}}$ von höherem Grad als $e_0 p^{n+1} = rp = e + r$, und um eine Basis für den Grad $e_0 p^{n+1}$ zu bekommen, ist zu den Einheiten $\eta_{e_0,1}^{p^{n+1}}, \dots \eta_{e_0,f-1}^{p^{n+1}}$ noch eine geeignet gewählte Einheit η_{rp} vom Grade rp hinzuzufügen; die Einheiten $\eta_{e_0,1}^{p^{n+s+1}}, \dots \eta_{e_0,f-1}^{p^{n+s+1}}, \eta_{rp}^{p^s}$ bilden dann für $s = 1, 2, \dots$ je eine Basis für den Grad $rp + se = r + (s+1)e$ (H I, S. 205—206; H II, S. 217—218).

6) Sind $\varepsilon, \varepsilon', \dots \varepsilon^{(k)}$ eine beliebige endliche Zahl von Einseinheiten, so bilden alle Zahlen der Gestalt $\varepsilon^{A_0} \varepsilon'^{A_1} \dots \varepsilon^{(k)A_k}$, wobei $A_0, A_1, \dots A_k$ alle ganzen rationalen p-adischen Zahlen durchlaufen, einen Strahl, welcher mit $\{\varepsilon, \varepsilon', \dots \varepsilon^{(k)}\}$ bezeichnet werden soll. $\varepsilon, \varepsilon', \dots \varepsilon^{(k)}$ heißen eine Basis des Strahls. Eine Basis soll reduziert heißen, wenn aus $\varepsilon^{A_0} \varepsilon'^{A_1} \dots \varepsilon^{(k)A_k} = 1$ folgt: $\varepsilon^{A_0} = 1, \varepsilon'^{A_1} = 1, \dots \varepsilon^{(k)A_k} = 1$. Wenn $\varepsilon^{(i)}$ keine Einheitswurzel ist, so folgt aus $\varepsilon^{(i)A_i} = 1$ $A_i = 0$; ist dagegen $\varepsilon^{(i)}$ eine $p^{m\text{te}}$ Einheitswurzel, so folgt aus $\varepsilon^{(i)A_i} = 1$ $A_i \equiv 0 \pmod{p^m}$. Kommt jede Zahl des Strahles $\{\varepsilon, \varepsilon', \dots \varepsilon^{(k)}\}$ auch im Strahl $\{\eta, \eta', \dots \eta^{(l)}\}$ vor und umgekehrt, so heißen die beiden Basen $\varepsilon, \varepsilon', \dots \varepsilon^{(k)}$ und $\eta, \eta' \dots \eta^{(l)}$ äquivalent. Ein Strahl von Einseinheiten soll irregulär oder regulär heißen, je nachdem er primitive p^{te} Einheitswurzeln enthält oder nicht. Einheitswurzeln von einem andern Wurzelexponenten als einer reinen Potenz von p kann ein Strahl von Einseinheiten nie enthalten. Alle in einem irregulären Strahl von Einseinheiten enthaltenen Einheitswurzeln bilden einen endlichen Strahl mit einem einzigen Basiselement. Enthält ein irregulärer Strahl von Einseinheiten S primitive $p^{m\text{te}}$ Einheitswurzeln, dagegen keine primitiven $p^{m+1\text{teu}}$ Einheitswurzeln, so muß jede reduzierte Basis von S eine und nur eine primitive $p^{m\text{te}}$ Einheitswurzel als Basiselement enthalten. Die Anzahl der Basiselemente einer reduzierten Basis ist eine Invariante des Strahls.

7) Der sämtliche Einseinheiten von $k(\mathfrak{p})$ umfassende Strahl S ist im regulären Fall ein regulärer Strahl und läßt sich durch eine reduzierte Basis von ef Elementen darstellen. Im irregulären Fall ist dieser Strahl ein irregulärer, und seine reduzierte Basis besteht aus einer Einheitswurzel vom höchsten Wurzelexponenten p^m, wobei $m \leqq n+1$ ist, und ef Elementen, welche keine Einheitswurzeln sind.

Sind $k_1, k_2, \dots k_e$ alle zu p teilerfremden Zahlen der Reihe $1, 2, \dots e+r$, so findet man im regulären Fall eine Basis für S, wenn man für jeden Grad k_s, $s = 1, 2, \dots e$ eine Basis $\eta_{k_s,1}, \dots \eta_{k_s,f}$ bildet, und es ist

$$S = \{\eta_{k_1,1}, \dots \eta_{k_1,f}, \eta_{k_2 1}, \dots \eta_{k_2,f}, \dots \eta_{k_e,1}, \dots \eta_{k_e,f}\} \quad \text{(H I, S. 202—205).}$$

Im irregulären Fall bilde man auf gleiche Art ef Basiseinheiten, wobei wie unter 5) $\eta_{e_0,f}$ als irreguläre, $\eta_{e_0,1}, \dots \eta_{e_0,f-1}$ als reguläre Einheiten gewählt werden sollen, und außerdem die unter 5) konstruierte Basiseinheit η_{rp}, dann bilden diese Einheiten eine nicht reduzierte Basis von S

$$S = \{\eta_{k_1,1}, \dots \eta_{k_e,f}, \eta_{rp}\} \quad \text{(H I, S. 205—207).}$$

Zwischen diesen Einheiten besteht eine Gleichung

$$\text{(3.)} \qquad \eta_{e_0,f}^{p^{n+1}} = \eta_{pr}^{c} \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f}{}' \eta_{k_i,j}^{c_{i,j}} \quad (\mathfrak{p})$$

mit Ausschluß von $\eta_{e_0,f}$ unter dem Produktzeichen. Alle Exponenten $c, c_{i,j}$ müssen mindestens durch p teilbar sein, weil $\eta_{e_0,f}^{p^{n+1}}$ nach 5) von höherem Grad als pr ist. Ist p^m der größte gemeinsame Teiler von p^{n+1}, c und allen $c_{i,j}$, also $m \leqq n+1$, so existieren in S primitive $p^{m\text{te}}$, dagegen keine primitiven $p^{m+1\text{ten}}$ Einheitswurzeln. Es sei also

$$\text{(3*.)} \qquad \eta_{e_0,f}^{p^{n+1}} = \eta_{pr}^{c'p^m} \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f}{}' \eta_{k_i,j}^{p^m c'_{i,j}} \quad (\mathfrak{p})$$

mit Ausschluß von $\eta_{e_0,f}$ unter dem Produktzeichen, dann ist

$$\text{(4.)} \qquad \zeta = \eta_{e_0,f}^{-p^{n-m+1}} \eta_{pr}^{c'} \prod_{i} \prod_{j}{}' \eta_{k_i,j}^{c'_{i,j}} \quad (\mathfrak{p})$$

gleich einer primitiven $p^{m\text{ten}}$ Einheitswurzel (H I, S. 210).

In der Gleichung (4.) muß mindestens einer der $ef+1$ Exponenten $-p^{n-m+1}, c', c'_{i,j}$ zu p teilerfremd sein. Wird ein Basiselement, welches in der Gleichung (4.) einen zu p teilerfremden Exponenten hat (wenn $m = n+1$ ist, soll hierfür immer $\eta_{e_0,f}$ genommen werden), weggelassen, so bilden die übrigbleibenden ef Basiselemente die reduzierte Basis eines regulären Strahles S', und eine reduzierte Basis von S besteht aus dieser reduzierten Basis von S' und der Einheitswurzel ζ (H I, S. 214).

2.

Aus den eben angeführten Resultaten sollen nun im Fall, daß

k ein *Galois*scher Körper ist, weitere Schlüsse gezogen werden. Dazu führen uns folgende Tatsachen*). Es möge in k die Zerlegung gelten

$$(1.) \qquad p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_z)^e, \; N\mathfrak{p}_i = p^f,$$

und es sei G die *Galois*sche Gruppe von k. Dann bilden alle Permutationen von G, welche $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ ungeändert lassen, die Zerlegungsgruppe Z von $\mathfrak{p}$ vom Index z; der zu Z gehörige Unterkörper heißt der Zerlegungskörper k_z von $\mathfrak{p}$ vom Grade z. Sämtliche Permutationen t von G, für welche für jede ganze Zahl α von k

$$t\alpha \equiv \alpha (\mathfrak{p})$$

gilt, bilden einen Normalteiler T von Z vom Index f, also vom Grade e, die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$; der zu T gehörige Unterkörper von k heißt der Trägheitskörper k_t von $\mathfrak{p}$ vom Grade fz; schließlich bilden sämtliche Permutationen v, welche der Bedingung genügen

$$v\alpha \equiv \alpha (\mathfrak{p}^2),$$

wobei α wieder jede ganze Zahl von k sein kann, einen Normalteiler V von T, dessen Grad gleich der höchsten in e enthaltenen Potenz von p ist. Es sei $e = e_1 p^n$, $e_1 \not\equiv 0 (p)$, dann ist V, die Verzweigungsgruppe von $\mathfrak{p}$, vom Grade p^n; der zu V gehörige Unterkörper von k heißt der Verzweigungskörper k_v von $\mathfrak{p}$ vom Grade $e_1 fz$.

In k_z gilt die Zerlegung $p = \mathfrak{p}'\mathfrak{a}$, $N\mathfrak{p}' = p$, wobei $\mathfrak{p}'$ ein Primideal, $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{p}'$ teilerfremdes Ideal bedeutet. In k_t bleibt $\mathfrak{p}'$ Primideal, aber sein Grad erhöht sich auf f. Wegen der Gleichheit der Normen von $\mathfrak{p}$ in k und $\mathfrak{p}'$ in k_t läßt sich jede ganze Zahl von k in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von π entwickeln, deren Koeffizienten dem Körper k_t angehören; der Inbegriff aller dieser Potenzreihen bildet den Körper $k(\mathfrak{p})$. Als Koeffizienten dieser Potenzreihen können wieder wie allgemein $p^f - 1^{\text{te}}$ Einheitswurzeln und die Zahl Null genommen werden, welche Zahlen des Körpers $k_t(\mathfrak{p}')$ sind.

In k_z ist p eine durch $\mathfrak{p}'$, aber nicht durch $\mathfrak{p}'^2$ teilbare ganze Zahl,

---

*) Vergl. hierzu *D. Hilbert*, Grundzüge einer Theorie des *Galois*schen Zahlkörpers. Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1894 oder *D. Hilbert*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1894/95. II. Teil.

und $\mathfrak{p}'$ ist vom Grade 1; es stimmt daher der Körper $k_z(\mathfrak{p}')$ mit dem Körper der rationalen p-adischen Zahlen überein.

Der Körper k_t ist vom Relativgrad f über k_z; jede Zahl von k_t genügt daher einer Gleichung f^{ten} Grades, deren Koeffizienten dem Körper k_z angehören, und jede Zahl von $k_t(\mathfrak{p}')$ genügt einer Gleichung f^{ten} Grades, deren Koeffizienten dem Körper $k_z(\mathfrak{p}')$ angehören, also rationale p-adische Zahlen sind. So genügt auch jede p^f-1te Einheitswurzel einer Gleichung f^{ten} Grades mit rationalen p-adischen Koeffizienten. Nach einer Bezeichnung von *Bachmann* sagt man, die Einheitswurzel ω_0 paßt zum Exponenten f_0, wenn $\omega_0^{p^{f_0}} = \omega_0$ ist und f_0 der niedrigste positive Exponent ist, für den diese Bedingung erfüllt ist. Dabei muß f_0 ein Teiler von f sein. Paßt ω_0 zum Exponenten f_0, so sind die Zahlen $\omega_0, \omega_0^p, \ldots \omega_0^{p^{f_0-1}}$ die Wurzeln einer Gleichung vom Grade f_0, welche ganze p-adische Koeffizienten hat und im Bereiche der p-adischen Zahlen irreduktibel ist. Die Gleichung für die p^f-1ten Einheitswurzeln

$$x^{p^f-1} = 1\,(p)$$

zerfällt daher im Bereiche der p-adischen Zahlen in irreduktible Faktoren vom Grade f oder einem Teiler von f, und zwar sind die nullten Näherungswerte dieser Funktionen sämtliche mod p irreduktiblen ganzen Funktionen vom Grade f oder einem Teiler von f*).

Der Index e_1 der Verzweigungsgruppe V bezüglich der Trägheitsgruppe T ist ein Teiler von p^f-1. Ist wieder π eine Primzahl von $k(\mathfrak{p})$, ω eine primitive p^f-1te Einheitswurzel, so gibt es in der Trägheitsgruppe eine Permutation t_0, für welche die Kongruenz gilt

$$t_0\pi \equiv \omega^{\frac{p^f-1}{e_1}}\pi \equiv \omega^h\pi\,(\mathfrak{p}^2);$$

die Bezeichnung $\frac{p^f-1}{e_1} = h$ soll im folgenden ständig angewendet werden. Da $t_0^{e_1}$ wegen $t_0^{e_1}\pi \equiv \pi\,(\mathfrak{p}^2)$ eine Permutation der Verzweigungsgruppe ist und diese den Grad p^n hat, so gilt

$$t_0^{e_1 p^n} = 1.$$

Wird c aus der Kongruenz bestimmt

---

*) Vergl. hierzu *Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, S. 189—196.

$$cp^n \equiv 1 \pmod{p^f - 1},$$

so erfüllt die Permutation $t = t_0^{cp^n}$ die Bedingungen

$$t\pi \equiv \omega^h \pi \,(\mathfrak{p}^2), \quad t^{e_1} = 1, \tag{2.}$$

und die ganze Trägheitsgruppe erscheint als das Produkt der Verzweigungsgruppe mit der Potenzgruppe dieser so bestimmten Permutation t

$$T = (1, t, \ldots t^{e_1 - 1})\, V. \tag{3.}$$

Mit dieser Permutation t der Trägheitsgruppe wird im folgenden stets operiert.

Ist $f(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m$ eine ganze Funktion mit ganzen rationalen p-adischen Koeffizienten und α eine Zahl von $k(\mathfrak{p})$, so soll unter der symbolischen Potenz $\alpha^{f(t)}$ der Ausdruck verstanden werden

$$\alpha^{f(t)} = \alpha^{A_0} \cdot (t\alpha)^{A_1} \ldots (t^m \alpha)^{A_m}(\mathfrak{p}), \tag{4.}$$

und es ist ersichtlich

$$\alpha^{f(t)} = \alpha^{f_0(t)}(\mathfrak{p}),$$

wenn $f(x) \equiv f_0(x) \pmod{x^{e_1} - 1}$.

Die Funktion $x^{e_1} - 1$ ist ein Teiler von $x^{p^f - 1} - 1$, da e_1 ein Teiler von $p^f - 1$ ist, und zerfällt daher auch in lauter irreduktible p-adische Faktoren vom Grade f oder einem Teiler von f, und die nullten Näherungsreste dieser Funktionen sind die mod p irreduktiblen Funktionen, in welche $x^{e_1} - 1$ nach dem Modul p zerfällt. Es sei

$$x^{e_1} - 1 = r_0(x)\, r_1(x) \ldots (p) \tag{5.}$$

die Zerlegung von $x^{e_1} - 1$ in irreduktible Faktoren im Bereiche der rationalen p-adischen Zahlen, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz von x stets gleich 1 angenommen ist. Die nullten Näherungswerte dieser Funktionen mögen mit $r_{00}(x)$, $r_{10}(x)$, ... bezeichnet werden, ihre Koeffizienten sollen der Reihe $0, 1, \ldots p - 1$ entnommen werden; es ist also die Zerlegung von $x^{e_1} - 1$ in irreduktible Funktionen mod p gegeben durch

$$x^{e_1} - 1 \equiv r_{00}(x)\, r_{10}(x) \ldots \pmod{p}. \tag{6.}$$

Wird $\omega^h = \omega_0$ gesetzt, so ist ω_0 eine primitive e_1^{te} Einheitswurzel, und alle e_1^{ten} Einheitswurzeln erscheinen in der Gestalt ω_0^h, $h = 0, 1, \ldots e_1 - 1$.

Die Bezeichnungsweise werde nun so gewählt, daß ω_0^e eine Wurzel

von $r_a(x) = 0\,(p)$ ist; paßt ω_0^a zum Exponenten f_a, so ist $r_a(x)$ vom Grade f_a (Teiler von f) und hat die einfachen Wurzeln $\omega_0^a, \omega_0^{pa}, \ldots \omega_0^{p^{f_a-1}a}$, und es werde $r_{a_1}(x) = r_a(x)$ gesetzt, wenn $a_1 \equiv ap^k \pmod{e_1}$ ist.

Definition: Eine Einseinheit a^{ten} Grades ε_a gehört zum (symbolischen) Exponenten $h(t) = t^m + A_1 t^{m-1} + \cdots + A_m$, wenn $h(x)$ die ganze Funktion niedrigsten Grades mit ganzen rationalen p-adischen Koeffizienten und dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von x ist, für welche $\varepsilon_a^{f(t)} = 1\,(\mathfrak{p})$ gilt; ε_a gehört nach dem Modul $\mathfrak{p}$ zum (symbolischen) Exponenten $h_0(t)$, wenn $h_0(x)$ die ganze Funktion niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus der Reihe $0, 1, \ldots p-1$ und dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von x ist, für welche $\varepsilon_a^{h_0(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1})$ gilt.

Satz 1. Jede Einseinheit a^{ten} Grades ε_a gehört nach den getroffenen Festsetzungen in der Bezeichnungsweise mod $\mathfrak{p}$ zum symbolischen Exponenten $r_{a0}(t)$; Einseinheiten, deren Grade mod e_1 kongruent sind, gehören mod $\mathfrak{p}$ zum gleichen Exponenten; ist schließlich $\varepsilon_a^{f(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1})$, so muß $f(x)$ mod p durch $r_{a0}(x)$ teilbar sein.

Beweis. Es sei $\varepsilon_a \equiv 1 + \omega^c \pi^a\,(\mathfrak{p}^{a+1})$, dann ist nach (2.)

$$t^i \varepsilon_a \equiv 1 + \omega^{c+iah} \pi^a\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$
$$t^i \varepsilon_a^k \equiv 1 + k\,\omega^{c+iah} \pi^a\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$
$$\varepsilon_a^{f(t)} \equiv 1 + \omega^c f(\omega^{ah})\, \pi^a\,(\mathfrak{p}^{a+1}).$$

Aus $r_a(\omega^{ah}) = r_a(\omega_0^a) = 0\,(\mathfrak{p})$
folgt $r_{a0}(\omega_0^a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$,

und damit ist der erste und zweite Teil der Behauptung bewiesen. Ist schließlich

$$\varepsilon_a^{f(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$

so kann, wegen der Irreduktibilität von $r_{a0}(x)$ mod p, $f(x)$ mod p nur entweder durch $r_{a0}(x)$ teilbar oder zu $r_{a0}(x)$ teilerfremd sein. Ist aber $f(x)$ mod p zu $r_{a0}(x)$ teilerfremd, so gibt es zwei ganze ganzzahlige Funktionen $A(x)$ und $B(x)$, für welche

$$(7.) \qquad 1 \equiv A(x) f(x) + B(x) r_{a0}(x) \pmod{p}$$

gilt; dann folgt aber, wenn man die Tatsache $\varepsilon_a^p \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1})$ beachtet, aus (7.)

$$\varepsilon_a \equiv \varepsilon_a^{A(t)f(t)+B(t)r_{a0}(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$

und dies ist ein Widerspruch gegen den vorausgesetzten Grad von ε_a. Daher ist nur die Annahme

$$(8.) \qquad f(x) \equiv r_{a0}(x)\, Q(x) \pmod{p}$$

statthaft, w. z. b. w.

Satz 2. Paßt ω_0^a zum Exponenten f_0 und ist $f = f_0 f_1$, so gibt es f_1 Einseinheiten a^{ten} Grades $\varepsilon_{a,1}, \dots \varepsilon_{a,f_1}$ von der Eigenschaft, daß $\varepsilon_{a,1}, t\varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}, \varepsilon_{a,2}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,f_1}$ eine Basis für den Grad a bilden, und aus $\varepsilon_{a,1}^{g_1(t)} \varepsilon_{a,2}^{g_2(t)} \dots \varepsilon_{a,f_1}^{g_{f_1}(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1})$ folgt dann $g_1(x) \equiv g_2(x) \equiv \dots \equiv g_{f_1}(x) \equiv 0$ (modd p, $r_{a0}(x)$).

Beweis. Es sei $\varepsilon_{a,1}$ eine beliebige Einheit a^{ten} Grades, dann sind $\varepsilon_{a,1}, t\varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}$ unabhängig, weil nach Satz 1 $\varepsilon_a \bmod \mathfrak{p}$ zum Exponenten $r_{a0}(t)$ gehört und $r_{a0}(x)$ nach Voraussetzung den Grad f_0 besitzt. Ist $f_1 = 1$, also $f_0 = f$, so ist damit die Behauptung erwiesen; ist dagegen $f_1 > 1$, so werde $\varepsilon_{a,2}$ so gewählt, daß $\varepsilon_{a,2}, \varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}$ unabhängig sind. Dann sind aber auch $\varepsilon_{a,2}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,2}, \varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}$ unabhängig; denn aus

$$(9.) \qquad \varepsilon_{a,2}^{g_2(t)} \varepsilon_{a,1}^{g_1(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1})$$

folgt —, weil $g_1(x)$ und $g_2(x)$ den Grad f_0 nicht erreichen und daher mod p zu $r_{a0}(x)$ teilerfremd sind, wenn $A(x)$ und $B(x)$ so bestimmt werden, daß $g_2(x)A(x) + r_{a0}(x)B(x) \equiv 1 \pmod{p}$ ausfällt, — durch Erheben in die symbolische Potenz $A(t)$

$$(10.) \qquad \varepsilon_{a,2}\, \varepsilon_{a,1}^{g_1(t)A(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1});$$

ist $g_1(x)A(x) \equiv g_1'(x) \pmod{r_{a,0}(x)}$, wobei $g_1'(x)$ den Grad f_0 nicht erreicht, so folgt aus (10.)

$$(10^a.) \qquad \varepsilon_{a,2}\, \varepsilon_{a,1}^{g_1'(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$

und dies ist ein Widerspruch gegen die Wahl von $\varepsilon_{a,2}$. Ist $f_1 > 2$, so kann dieses Verfahren fortgesetzt werden, denn es muß dann eine Einseinheit $\varepsilon_{a,3}$ geben, welche zusammen mit $\varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}, \varepsilon_{a,2}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,2}$ unabhängig ist; dann wird aber genau ebenso gezeigt, daß auch $\varepsilon_{a,1}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,1}, \varepsilon_{a,2}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,2}, \varepsilon_{a,3}, \dots t^{f_0-1}\varepsilon_{a,3}$ unabhängig sind, und die Fortsetzung des Verfahrens liefert schließlich f_1 Einheiten $\varepsilon_{a,1}, \varepsilon_{a,2}, \dots \varepsilon_{a,f_1}$ der verlangten Eigenschaft. Ist dann

$$\varepsilon_{a,1}^{g_1(t)} \varepsilon_{a,2}^{g_2(t)}, \dots \varepsilon_{a,f_1}^{g_{f_1}(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+1}),$$

so folgt nach der eben durchgeführten Beweisführung der Reihe nach

$$g_{f_1}(x) \equiv 0\,(\text{modd } p, r_{a,0}(x)),\ g_{f_1-1}(x) \equiv \dots \equiv g_1(x) \equiv 0\,(\text{modd } p, r_{a,0}(x)).$$

Satz 3. Es gibt zu jeder Einheit a^{ten} Grades eine ihr äquivalente, welche zum Exponenten $r_a(t)$ gehört.

Beweis. Es sei

$$\varepsilon_a^{r_a(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+i}), \quad i \geqq 1$$
$$\varepsilon_a^{r_a(t)} \not\equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+i+1}).$$

Die Einheiten vom Grade $a+i$ gehören mod $\mathfrak{p}$ zum Exponenten $r_{a+i,0}(t)$; es sei $r_{a+i,0}(x)$ vom Grade f_0' und $f = f_0' f_1'$, dann können wir nach Satz 2 eine Basis für den Grad $a+i$ in der Gestalt $\varepsilon_{a+i,1}, t\varepsilon_{a+i,1}, \ldots t^{f_0'-1}\varepsilon_{a+i,1}, \ldots t^{f_0'-1}\varepsilon_{a+i,f_1'}$ konstruieren, und es sei

$$\varepsilon_a^{r_a(t)} \equiv \varepsilon_{a+i,1}^{g_1(t)} \ldots \varepsilon_{a+i,f_1'}^{g_{f_1'}(t)}\,(\mathfrak{p}^{a+i+1}). \tag{11.}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $r_{a+i,0}(x)$ und $r_{a,0}(x)$ sind verschieden, dann sind sie mod p teilerfremd, und es lassen sich zwei ganze ganzzahlige Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ so bestimmen, daß

$$A(x)\,r_{a+i,0}(x) + B(x)\,r_{a,0}(x) \equiv 1 \pmod p \tag{12.}$$

ist. Setze ich dann

$$\varepsilon_a' = \varepsilon_a \prod_{s=1}^{f_1'} \varepsilon_{a+i,s}^{-g_s(t)\,B(t)},$$

so folgt aus (11.) und (12.)

$$\varepsilon_a'^{\,r_a(t)} \equiv \prod_s \varepsilon_{a+i,s}^{g_s(t) - B(t)\,g_s(t)\,r_a(t)} \equiv \prod_s \varepsilon_{a+i,s}^{g_s(t)\,A(t)\,r_{a+i,0}(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+i+1}). \tag{13.}$$

Es läßt sich also in diesem Fall eine mod $\mathfrak{p}^{a+i}$ zu ε_a kongruente Einheit ε_a' finden, für welche $\varepsilon_a'^{\,r_a(t)} \equiv 1\,(\mathfrak{p}^{a+i+1})$ gilt.

2) $r_{a+i,0}(x) = r_{a,0}(x)$.

Es sei

$$x^{e_1} - 1 = r_a(x)\,C(x)\,(p),$$

wobei $C(x)$ ganze p-adische Koeffizienten hat und zu $r_a(x)$ teilerfremd ist. Dann folgt aber aus (11.) durch Erheben in die symbolische Potenz $C(t)$

$$1 \equiv \prod_{s=1}^{f_1'} \varepsilon_{a+i,s}^{g_s(t)\,C(t)}\,(\mathfrak{p}^{a+i+1}).$$

Es muß daher nach Satz 2

$$g_s(x)\,C(x) \equiv 0 \;(\text{modd } p,\, r_{a,0}(x)) \tag{14.}$$

sein für $s = 1, 2, \ldots f_1'$, und da $C(x)$ mod p zu $r_{a,0}(x)$ teilerfremd ist, so folgt aus (14.)

$$g_s(x) \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\, p, r_{a,0}(x)), \ s = 1, 2, \ldots f_1'.$$

Dies enthält aber einen Widerspruch, weil dann schon $\varepsilon_a^{r_a(t)}$ von höherem Grade wäre als $a+i$, gegen die Voraussetzung. Dieser Fall 2) kann daher niemals eintreten. Der unter 1) dargestellte Schritt läßt sich daher unbeschränkt wiederholen, und das Verfahren führt schließlich zu einer Einheit $\varepsilon_a^* \equiv \varepsilon_a(\mathfrak{p}^{a+1})$, für welche $\varepsilon_a^{*r_a(t)} = 1(\mathfrak{p})$ gilt. ε_a^* gehört dann aber auch im Sinne der Definition zum Exponenten $r_a(t)$, denn $r_a(t)$ hat ganze p-adische Koeffizienten und den Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von x, und aus

$$\varepsilon_a^{f(t)} = 1(\mathfrak{p}), f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m,$$

wo alle A ganze p-adische Zahlen sind, folgt, wenn

$$f_0(x) \equiv f(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m \ (\mathrm{mod}\, p), \ 0 \leqq a_i < p,$$

gesetzt wird,

$$\varepsilon_a^{*f_0(t)} \equiv 1 \ (\mathfrak{p}^{a+1})$$

und daher nach Satz 1

$$f_0(x) \equiv r_{a,0}(x)\, Q(x) \ (\mathrm{mod}\, p).$$

$f_0(x)$ und daher auch $f(x)$ haben also mindestens den Grad von $r_a(x)$, und damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz 4. Gehört ε_a zum Exponenten $r_a(t)$, so folgt aus einer Gleichung $\varepsilon_a^{f(t)} = 1(\mathfrak{p})$ im Falle, daß ε_a keine $p^{m\,\mathrm{te}}$ Einheitswurzel ist, $f(x) = r_a(x) Q(x) (p)$; wenn dagegen ε_a eine primitive $p^{m\,\mathrm{te}}$ Einheitswurzel ist, so folgt $f(x) \equiv r_a(x) Q(x) (\mathrm{mod}\, p^m)$.

Beweis. Ist $f(x)$ im Bereich der p-adischen Zahlen nicht durch $r_a(x)$ teilbar, so existieren zwei ganze Funktionen mit ganzzahligen p-adischen Koeffizienten, welche nicht sämtlich durch p teilbar sind, $A(x)$ und $B(x)$, und eine ganze Zahl m (positiv oder Null), so daß eine Gleichung besteht

$$p^m = A(x) f(x) + B(x) r_a(x) (p). \tag{15.}$$

Dann folgt aber aus

$$\varepsilon_a^{f(t)} = \varepsilon_a^{r_a(t)} = 1 \ (\mathfrak{p})$$

durch Erheben in die symbolische Potenz $A(t)$

$$\varepsilon_a^{p^m} = 1 \ (\mathfrak{p}). \tag{16.}$$

Dies ist nur dann kein Widerspruch, wenn ε_a eine $p^{m\,\mathrm{te}}$ Einheitswurzel ist. Ist aber ε_a eine primitive $p^{m\,\mathrm{te}}$ Einheitswurzel und $f(x) \bmod p^m$ nicht durch $r_a(x)$ teilbar, so sei

$$(17.) \qquad f(x) \equiv p^{m'} f_0(x) \ (\mathrm{modd}\ p^m, r_a(x)),$$

wobei $m' < m$, $f_0(x) \not\equiv 0 \pmod p$ und von niedrigerem Grad als $r_a(x)$ ist. $f_0(x)$ muß daher zu $r_{a,0}(x) \bmod p$ teilerfremd sein, und es folgt eine Gleichung

$$1 = C(x) f_0(x) + D(x) r_a(x) \ (p),$$
$$p^{m'} = C(x) \cdot p^{m'} f_0(x) + p^{m'} D(x) r_a(x) \ (p).$$

Dann folgt aber aus den Voraussetzungen über ε_a (daß nämlich $\varepsilon_a^{f(t)} = \varepsilon_a^{r_a(t)} = 1$) und aus (16.) und (17.), daß auch

$$\varepsilon_a^{p^{m'}} = 1 \ (\mathfrak{p}),$$

und das ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, daß ε_a eine primitive p^{mte} Einheitswurzel ist. Daher muß $f(x) \bmod p^m$ durch $r_a(x)$ teilbar sein, w. z. b. w.

Satz 5. Enthält der Körper $k(\mathfrak{p})$ keine primitiven p^{ten} Einheitswurzeln, so kann für den Strahl S, welcher sämtliche Einseinheiten von $k(\mathfrak{p})$ enthält, eine reduzierte Basis mit folgenden Eigenschaften angegeben werden: 1) es kommt unter den Basiselementen eine Basis für jeden zu p teilerfremden Grad $\leqq e + r$ vor; 2) jedes Basiselement vom Grade a gehört zum Exponenten $r_a(t)$; 3) ist η_a ein Basiselement vom Grade a und $r_a(x)$ vom Grade f_0, so sind auch $t\eta_a, \ldots t^{f_0-1}\eta_a$ Basiselemente von S.

Beweis. Nach Abschnitt 1. 3) liegt unter den gemachten Voraussetzungen der reguläre Fall vor und aus 7) folgt die erste Behauptung. Satz 3 zeigt, daß die zweite Forderung, und Satz 2, daß die dritte Forderung erfüllbar ist, wobei nur noch gezeigt werden muß, daß aus der Tatsache, daß η_a zum Exponenten $r_a(t)$ gehört, auch folgt, daß $t^i\eta_a$ zum gleichen Exponenten gehört. Daß

$$(t^i \eta_a)^{r_a(t)} = 1 \ (\mathfrak{p})$$

ist, wenn

$$\eta_a^{r_a(t)} = 1 \ (\mathfrak{p})$$

ist, folgt ohne weiteres. Es sei aber

$$(t^i \eta_a)^{f(t)} = \eta_a^{t^i f(t)} = 1 \ (\mathfrak{p}),$$

dann folgt nach Satz 4

$$x^i f(x) \equiv r_a(x)\, Q(x) \ (p);$$

$r_a(x)$ ist im Bereiche der p-adischen Zahlen irreduktibel und muß daher entweder in x^i oder in $f(x)$ aufgehen; das erstere ist unmöglich, da $r_a(x)$

nicht eine bloße Potenz von x sein kann, da es ein Teiler von $x^{e_1}-1$ ist: es muß also $r_a(x)$ in $f(x)$ aufgehen, der Exponent, zu dem $t^i\eta_a$ gehört, muß also mindestens den Grad von $r_a(x)$ haben und daher mit $r_a(t)$ zusammenfallen.

Sind also wieder $k_1, k_2, \dots k_e$ alle zu p teilerfremden Zahlen der Reihe $1, 2, \dots r+e$ und hat $r_{k_i}(x)$ den Grad $f_0^{(i)}$, wird ferner $f = f_0^{(i)} f_1^{(i)}$ gesetzt und bilden $\eta_{k_i,j}, t\eta_{k_i,j}, \dots t^{f_0^{(i)}-1}\eta_{k_i,j}$ für $j = 1, 2, \dots f_1^{(i)}$ eine Basis für den Grad k_i von der Eigenschaft, daß $\eta_{k_i,j}^{r_{k_i}(t)} = 1\,(\mathfrak{p})$, so ist damit eine Basis von den geforderten Eigenschaften gefunden, und es erscheint jede Einseinheit ε von $k(\mathfrak{p})$ eindeutig in der Gestalt

$$\varepsilon = \prod_{i=1}^{e}\prod_{j=1}^{f_1^{(i)}} \eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t)}\,(\mathfrak{p}), \tag{18.}$$

wobei die $g_{i,j}(x)$ ganze Funktionen mit ganzen p-adischen Koefizienten sind, welche den Grad $f_0^{(i)}$ nicht erreichen.

Satz 5ª. Enthält der Körper $k(\mathfrak{p})$ primitive p^{te} Einheitswurzeln, so läßt sich eine reduzierte Basis für den alle Einseinheiten von $k(\mathfrak{p})$ enthaltenden Strahl S angeben, welche die unter 2) und 3) in Satz 5 geforderten Eigenschaften hat.

Beweis. Es liegt nach der gemachten Voraussetzung der irreguläre Fall vor; nach Abschnitt 1. 7) kann in diesem Fall eine nicht reduzierte Basis von S gefunden werden, indem für alle zu p teilerfremden Grade $< e+r$ eine Basis wie für den regulären Fall gebildet wird, wobei beim Grad e_0 das Basiselement $\eta_{e_0,f}$ irregulär, die $f-1$ übrigen Basiselemente für den Grad e_0 regulär sein sollen und zu diesen eine geeignet gewählte Einheit η_{rp} vom Grade rp hinzugefügt wird. Die Einheiten vom Grade e_0 und $rp = e_0 p^{n+1}$ können nun so gewählt werden, daß sie zu einem Exponenten vom ersten Grad in t gehören; denn

$$\omega_0^{e_0} = \omega^{\frac{p^f-1}{e_1}e_0} = \omega^{\frac{p^f-1}{p-1}}$$

ist eine primitive $p-1^{\text{te}}$ Einheitswurzel und daher gleich einer rationalen p-adischen Zahl $C \equiv -c \pmod p$, wobei $0 < c < p$. Die Einheiten vom Grade e_0 und rp gehören daher mod $\mathfrak{p}$ zum Exponenten $t+c$ und können nach Satz 3 als zum Exponenten $t-C$ gehörig angenommen werden. Für die Einheiten aller andern Grade kann genau ebenso wie im regulären

Fall je eine Basis mit den geforderten Eigenschaften gefunden werden. Aus dieser nicht reduzierten Basis kann nun nach Abschnitt 1. 7) eine reduzierte Basis gebildet werden, indem in der Gleichung (4.) von Abschnitt 1 eine Einheit fortgelassen wird, welche einen zu p teilerfremden Exponenten hat, und an ihre Stelle die Einheitswurzel ζ in die Basis aufgenommen wird. Es sei nun ebenso wie im regulären Fall $\eta_{k_i,j}, t\eta_{k_i,j}, \ldots t^{f_0^{(i)}-1}\eta_{k_i,j}$ für $j = 1, 2, \ldots f_1^{(i)}$ eine Basis für den Grad k_i. Dann schreibt sich die Gleichung (3.) von Abschnitt 1 in der Gestalt

$$1 = \eta_{pr}^{d} \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f_1^{(i)}} \eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}), \tag{19.}$$

wobei der Exponent von $\eta_{e_0,f}$ gleich $-p^{n+1}$ ist und $g_{i,j}(x)$ den Grad $f_i^{(0)}$ nicht erreicht. Aus (19.) folgt durch Erheben in die symbolische Potenz $t - C$

$$1 = \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f_1^{(i)}} \eta_{k_i,j}^{(t-C)g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}). \tag{20.}$$

In der Gleichung (20.) fallen nun alle jene Einheiten heraus, welche zum Exponenten $t - C$ gehören; zu diesem Exponenten gehört aber nach dem eben Gezeigten auch $\eta_{e_0,f}$. Zwischen den ef übrigen Basiselementen der nicht reduzierten Basis besteht aber keine Gleichung der Gestalt (19.), daher muß für alle Einheiten, welche nicht zum Exponenten $t - C$ gehören,

$$(x - C)\, g_{i,j}(x) = r_{k_i}(x)\, Q(x)\, (p)$$

sein, folglich, weil $r_{k_i}(x)$ nach Voraussetzung von $x - C$ verschieden ist, $g_{i,j}(x)$ durch $r_{k_i}(x)$ teilbar und, da es den Grad von $r_{k_i}(x)$ nicht erreicht, gleich Null sein. In der Gleichung (19.) können daher nur jene Einheiten einen von Null verschiedenen Exponenten haben, welche zum Exponenten $t - C$ gehören. Speziell gehört also die Einheit, welche beim Übergang von der nicht reduzierten zur reduzierten Basis weggelassen wird, zu diesem Exponenten vom ersten Grad; daher bleibt die Aussage 3) beim Übergang zur reduzierten Basis richtig. Auch die Einheitswurzel ζ gehört als Produkt von lauter Einheiten, welche zum Exponenten $t - C$ gehören, zu diesem Exponenten. Jede Einseinheit ε von $k(\mathfrak{p})$ erscheint also in diesem Fall eindeutig in der Gestalt

$$\varepsilon = \zeta^b \eta_{pr}^A \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f_1^{(i)}}{}' \eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}), \tag{21.}$$

wobei der Strich beim Produktzeichen andeutet, daß eine bestimmte Einheit, welche zum Exponenten $t - C$ gehört, auszulassen ist. b ist eine Zahl der Reihe $0, 1, \ldots p^m - 1$, A eine ganze p-adische Zahl; die $g_{i,j}(x)$ sind ganze Funktionen mit ganzen p-adischen Koeffizienten, welche den Grad $f_0^{(i)}$ nicht erreichen.

Satz 6. Es gibt in $k(\mathfrak{p})$ eine Primzahl π_0, für welche $t\pi_0 = \omega_0 \pi_0 (\mathfrak{p})$ gilt.

Beweis. Es ist nach (2.)

$$t\pi \equiv \omega_0 \pi (\mathfrak{p}^2),$$

also $t\pi = \omega_0 \pi \varepsilon (\mathfrak{p})$, wobei ε eine Einseinheit von $k(\mathfrak{p})$ bedeutet.

Daraus folgt im regulären Fall mit Verwendung der in Satz 5 konstruierten Basis nach (18.)

$$t\pi = \pi \omega_0 \prod_{i=1}^{e} \prod_{j=1}^{f_1^{(i)}} \eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}), \tag{22.}$$

daher

$$t^2\pi = \pi \omega_0^2 \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{(1+t)\, g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t^{e_1}\pi = \pi = \pi \omega_0^{e_1} \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{(1+t+\cdots+t^{e_1-1}) g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}),$$

folglich

$$1 = \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{(1+t+\cdots+t^{e_1-1}) g_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}). \tag{23.}$$

Setzen wir also

$$\pi_0 = \pi \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{h_{i,j}(t)} (\mathfrak{p}),$$

wobei

$$h_{i,j}(x) = \frac{1}{e_1} g_{i,j}(x) \frac{x^{e_1-1} + x^{e_1-2} + \cdots + x + 1 - e_1}{x - 1}$$

eine ganze Funktion mit ganzen p-adischen Koeffizienten ist, da $\frac{1}{e_1}$ eine ganze p-adische Zahl ist, so gilt für π_0 die Gleichung

$$t\pi_0 = \pi \omega_0 \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t) + t h_{i,j}(t)} = \pi \omega_0 \prod_i \prod_j \eta_{k_i,j}^{h_{i,j}(t) + (1+t+\cdots+t^{e_1-1}) \frac{g_{i,j}(t)}{e_1}} (\mathfrak{p})$$

und daher wegen (23.), da $\frac{1}{e_1}$ eine ganze p-adische Zahl ist, $t\pi_0 = \omega_0 \pi_0 (\mathfrak{p})$, w. z. b. w.

Liegt der irreguläre Fall vor, so folgt nach (21.) mit Verwendung der in Satz 5ª konstruierten Basis

$$t\pi = \pi\,\omega_0\zeta^b\eta_{pr}^{A}\prod_i\prod_j{}'\eta_{k_i,j}^{g_{i,j}(t)}\ (\mathfrak{p})$$

und daraus

$$t^{e_1}\pi = \pi = \pi\,\omega_0^{e_1}\zeta^{b(1+t+\cdots+t^{e_1-1})}\eta_{pr}^{A(1+t+\cdots+t^{e_1-1})}\prod_i\prod_j\eta_{k_i,j}^{(1+t+\cdots+t^{e_1-1})g_{i,j}(t)}\ (\mathfrak{p}).$$

Da ζ und η_{pr} zum Exponenten $t-C$ gehören, so folgt daher

$$(23^{a}.)\quad 1 = \zeta^{b(1+C+\cdots+C^{e_1-1})}\eta_{pr}^{A(1+C+\cdots+C^{e_1-1})}\prod_i\prod_j\eta_{k_i,j}^{(1+t+\cdots+t^{e_1-1})g_{i,j}(t)}.$$

Ist $p>2$, so ist $C\not\equiv 1\pmod p$ und $1+C+\cdots+C^{e_1-1}=0\,(p)$; ist dagegen $p=2$, so ist $C=1$, $1+C+\cdots+C^{e_1-1}=e_1$ und aus (23ª.) folgt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung, welche nach Satz 5ª. besteht, $b=A=0$. Setzen wir daher

$$\pi_0 = \pi\,\zeta^{b'}\eta_{pr}^{A'}\prod_i\prod_j{}'\eta_{k_i,j}^{h_{i,j}(t)}\ (\mathfrak{p}),$$

wobei die Funktionen $h_{i,j}(x)$ wie früher definiert sind und im Falle $p>2$, $b'=\dfrac{b}{1-C}$, $A'=\dfrac{A}{1-C}$, im Falle $p=2$, $b'=A'=0$ gesetzt ist, so folgt

$$t\pi_0 = \pi\,\omega_0\zeta^{b+b'C}\eta_{pr}^{A+A'C}\prod_i\prod_j{}'\eta_{k_i,j}^{h_{i,j}(t)+(1+t+\cdots+t^{e_1-1})\frac{g_{i,j}(t)}{e_1}} = \pi\,\omega_0\zeta^{b'}\eta_{pr}^{A'}\prod_i\prod_j\eta_{k_i,j}^{h_{i,j}(t)} = \pi_0\omega_0\ (\mathfrak{p}).$$

Der Mittelwert eines Quotienten.

Von Herrn *E. Czuber* in Wien.

Der Mittelwert einer Summe zufällig veränderlicher Größen setzt sich in einfacher Weise aus den Mittelwerten der Summanden zusammen, desgleichen der Mittelwert eines Produktes aus den Mittelwerten der Faktoren, sofern diese voneinander unabhängig sind. Auch über einige kompliziertere Größenverbindungen sind Mittelwertsätze abgeleitet worden.

Die folgenden Ausführungen gelten der Untersuchung des Mittelwertes eines Quotienten.

Es seien X, Y zwei voneinander unabhängige, zufällig veränderliche Größen, und zwar soll die Veränderlichkeit darin bestehen, daß X die Werte

$$x_1, x_2, \ldots x_m$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, \ldots p_m,$$

Y die Werte

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$q_1, q_2, \ldots q_n$$

annehmen kann; von dem Wertevorrat von Y wird vorausgesetzt, daß

kein Einzelwert Null ist und daß sie alle positiv sind. Mit der weiteren Annahme

$$(1.) \qquad \sum_{\lambda=1}^{m} p_\lambda = 1, \quad \sum_{\lambda=1}^{n} q_\lambda = 1$$

ist ausgesagt, daß die Wertevorräte vollständig sind.

Der Quotient $V = \frac{X}{Y}$ wird dadurch ebenfalls eine zufällig veränderliche Größe, deren mögliche Werte

$$(2.) \qquad v_1, v_2, \dots v_s$$

nebst ihren Wahrscheinlichkeiten

$$(3.) \qquad \pi_1, \pi_2, \dots \pi_s$$

durch die Wertevorräte von X und Y und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmt sind. Jedes π_ν ist ein Produkt von der Form $p_\alpha q_\beta$ oder eine Summe solcher Produkte, wobei für alle in dieser Summe auftretenden Wertepaare α, β die Beziehung $\frac{x_\alpha}{y_\beta} = v_\nu$ stattfindet.

Wären die Wertereihen (2.), (3.) einmal aufgestellt, so wäre der Mittelwert von V unmittelbar gegeben durch die Formel

$$(4.) \qquad M\left(\frac{X}{Y}\right) = \sum_{\lambda=1}^{s} \pi_\lambda v_\lambda .$$

Zu bemerken ist, daß s höchstens den Wert mn haben kann.

Dieser Weg zur Bestimmung von $M(V)$ ist nur ausnahmsweise in ganz einfachen Fällen praktisch gangbar.

Zweckmäßiger ist es, das folgende Verfahren einzuschlagen. Man bildet alle Quotienten $\frac{x_\alpha}{y_\beta}$ und multipliziert jeden mit der ihm eigentümlichen Wahrscheinlichkeit $p_\alpha q_\beta$; dem $M(V)$ kann dann folgende Anordnung gegeben werden:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{X}{Y}\right) = {} & \frac{x_1}{y_1} p_1 q_1 + \frac{x_2}{y_1} p_2 q_1 + \dots + \frac{x_m}{y_1} p_m q_1 \\ & + \frac{x_1}{y_2} p_1 q_2 + \frac{x_2}{y_2} p_2 q_2 + \dots + \frac{x_m}{y_2} p_m q_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{x_1}{y_n} p_1 q_n + \frac{x_2}{y_n} p_2 q_n + \dots + \frac{x_m}{y_n} p_m q_n , \end{aligned}$$

woraus durch entsprechende Zusammenfassung

$$M\left(\frac{X}{Y}\right) = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m)\left(\frac{q_1}{y_1} + \frac{q_2}{y_2} + \cdots + \frac{q_n}{y_n}\right)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$M\left(\frac{X}{Y}\right) = M(X) \cdot M\left(\frac{1}{Y}\right) \tag{5.}$$

erhalten wird.

Der hierin enthaltene Satz kann so ausgesprochen werden: *Der Mittelwert des Quotienten zweier voneinander unabhängiger, zufällig veränderlicher Größen ist gleich dem Produkt aus dem Mittelwert des Dividenden mit dem Mittelwert des reziproken Divisors.*

Mit andern Worten: Man hat den Quotienten $\frac{X}{Y}$ als Produkt $X \cdot \frac{1}{Y}$ aufzufassen und darauf den Produktsatz anzuwenden.

Unzulässig wäre die folgende Schlußweise. Aus $V = \frac{X}{Y}$ geht

$$X = YV$$

hervor, folglich ist

$$M(X) = M(YV) = M(Y)\,M(V),$$

woraus

$$M(V) \equiv M\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{M(X)}{M(Y)};$$

und zwar ist in dieser Schlußkette das Glied $M(YV) = M(Y)M(V)$ falsch, weil V und Y nicht unabhängig voneinander sind.

Unter der über den Wertevorrat von Y getroffenen Annahme läßt sich zeigen, daß $M\left(\frac{1}{Y}\right)$ und $\frac{1}{M(Y)}$ immer in demselben Sinne ungleich sind, nämlich

$$M\left(\frac{1}{Y}\right) > \frac{1}{M(Y)}.$$

Man bilde zu diesem Zwecke

$$M\left(\frac{1}{Y}\right) - \frac{1}{M(Y)} = \frac{q_1}{y_1} + \frac{q_2}{y_2} + \cdots + \frac{q_n}{y_n} - \frac{1}{q_1 y_1 + q_2 y_2 + \cdots + q_n y_n},$$

wofür mit Rücksicht auf (1.) auch

$$M\left(\frac{1}{Y}\right)-\frac{1}{M(Y)}=\frac{q_1}{y_1}+\frac{q_2}{y_2}+\cdots+\frac{q_n}{y_n}-\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{q_1y_1+q_2y_2+\cdots+q_ny_n}$$

geschrieben werden kann. Die rechte Seite kann weiter umgeformt werden in

$$\frac{q_1}{y_1}-\frac{q_1}{M(Y)}+\frac{q_2}{y_2}-\frac{q_2}{M(Y)}+\cdots+\frac{q_n}{y_n}-\frac{q_n}{M(Y)},$$

dies wiederum in

$$\frac{q_1(M(Y)-y_1)}{y_1M(Y)}+\frac{q_2(M(Y)-y_2)}{y_2M(Y)}+\cdots+\frac{q_n(M(Y)-y_n)}{y_nM(Y)}$$

und schließlich in

$$\frac{q_1(M(Y)-y_1)y_2y_3\cdots y_n+q_2(M(Y)-y_2)y_1y_3\cdots y_n+\cdots+q_n(M(Y)-y_n)y_1y_2\cdots y_{n-1}}{y_1y_2\cdots y_nM(Y)};$$

die Entwicklung des Zählers aber gibt

$$M(Y)\{q_1y_2y_3\cdots y_n+q_2y_1y_3\cdots y_n+\cdots+q_ny_1y_2\cdots y_{n-1}\}-y_1y_2\cdots y_n;$$

wenn man aber die im Minuend angezeigte Multiplikation ausführt und die Glieder wie folgt ordnet:

$$\begin{aligned}
&q_1^2\,y_1\,y_2\cdots y_n+q_1q_2y_1^2y_3\cdots y_n+\cdots+q_1q_ny_1^2y_2\cdots y_{n-1}\\
&+q_1q_2y_2^2y_3\cdots y_n+q_2^2\,y_1\,y_2\cdots y_n+\cdots+q_2q_ny_1y_2^2\cdots y_{n-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+q_1q_ny_2y_3\cdots y_n^2+q_2q_ny_1y_3\cdots y_n^2+\cdots+q_n^2\,y_1\,y_2\cdots y_n,
\end{aligned}$$

so läßt sich eben dieser Minuend auch so darstellen:

$$\begin{aligned}
&(q_1^2+q_2^2+\cdots+q_n^2)y_1y_2\cdots y_n\\
&+q_1q_2(y_1^2+y_2^2)y_3\cdots y_n+q_1q_3(y_1^2+y_3^2)y_2y_4\cdots y_n+\cdots\\
&\qquad+q_{n-1}q_n(y_{n-1}^2+y_n^2)y_1\cdots y_{n-2},
\end{aligned}$$

was wieder durch Hinzufügung und Wegnahme gleicher Glieder in

$$\begin{aligned}
&(q_1+q_2+\cdots+q_n)^2y_1y_2\cdots y_n\\
&+q_1q_2(y_1-y_2)^2y_3\cdots y_n+q_1q_3(y_1-y_3)^2y_2y_4\cdots y_n+\cdots\\
&\qquad+q_{n-1}q_n(y_{n-1}-y_n)^2y_1\cdots y_{n-2}
\end{aligned}$$

umgesetzt werden kann; sonach ist der mehrerwähnte Minuend auch gleich

$$y_1y_2\cdots y_n+\Sigma q_\alpha q_\beta(y_\alpha-y_\beta)^2y_\gamma\cdots y_\nu,$$

die Summe über alle Wertepaare α, β aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ erstreckt, wobei $\gamma, \ldots \nu$ jedesmal die übrigen Elemente dieser Reihe bedeuten.

Man hat also endgültig

$$M\left(\frac{1}{Y}\right)-\frac{1}{M(Y)}=\frac{\Sigma q_\alpha q_\beta (y_\alpha-y_\beta)^2 y_\gamma\cdots y_\nu}{y_1 y_2\cdots y_n M(Y)},$$

und da die rechte Seite wesentlich positiv ist, so ist in der Tat, wie oben behauptet worden,

$$M\left(\frac{1}{Y}\right)>\frac{1}{M(Y)},$$

somit weiter, wenn auch $M(X)$ als positiv vorausgesetzt wird,

$$M\left(\frac{X}{Y}\right)>\frac{M(X)}{M(Y)}.$$

Bemerkungen zu der Aufgabe, eine quadratische Form als Summe von Quadraten linearer Formen darzustellen.

Von Herrn *J. Rosanes* in Breslau.

Die in der Überschrift genannte Frage ist schon vielfach behandelt worden.

Hoffentlich erscheinen die in den nachstehenden Zeilen ihr gewidmeten Überlegungen dennoch des Interesses nicht ganz unwert.

Es sei $f(\xi\xi) \equiv \sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k$, $a_{ik} = a_{ki}$, $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ eine quadratische Form der n Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

Ein jedes Wertsystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Unbestimmten heißt „eine Stelle" α, die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ heißen deren Koordinaten.

Sind $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(r)}$ r unabhängige Stellen, dann bilden sämtliche aus ihnen linear komponierbaren Stellen die „r-gliedrige Gruppe" $(\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(r)})$, auch das r-gliedrige Gebiet, die Stellen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(r)}$ „eine Basis" des Gebietes.

Ist $f(\alpha, \alpha) = 0$, so ist α „Nullstelle", ist auch $f(\xi, \alpha) \equiv 0$, so ist α „singuläre Stelle" von $f(\xi\xi)$.

Setzt man den Rang von f: $R(f) = p$, dann bilden dessen singuläre Stellen ein q-gliedriges Gebiet $(p + q = n)$, von dem $\xi', \xi'' \ldots \xi^{(q)}$ eine Basis darstellen mögen.

Es gilt nun folgender

Satz. Sind f, φ zwei quadratische Formen, dann bestehen die Ungleichungen:

$$(1.) \qquad |R(f) - R(\varphi)| \leqq R(f + \varphi) \leqq R(f) + R(\varphi).$$

Ist nämlich $\varphi(\xi\xi) \equiv \Sigma b_{ik}\xi_i\xi_k$, $R(f) = p$, $R(\varphi) = p'$ und betrachtet man die Determinante $D(f + \varphi) \equiv |a_{ik} + b_{ik}|$, dann stellt sich irgendeiner ihrer

Minoren des Grades $(p+p'+1)$ dar als Summe von Produkten aus je einem Minor von $|a_{ik}|$ und einem von $|b_{ik}|$, deren Grade einander zu $p+p'+1$ ergänzen. Somit ist entweder der Faktor-Minor der a vom Grade $>p$, oder der der b vom Grade $>p'$, jeder Minor des Grades $p+p'+1$ von $D(f+\varphi)$ ist somit Null, d. h.

$$R(f+\varphi) \leqq R(f)+R(\varphi).$$

Setzt man hierin $-\varphi$ statt φ, so folgt, da $R(-\varphi)=R(\varphi)$ ist, $R(f+\varphi)+R(\varphi) \geqq R(f)$, d. h. $R(f+\varphi) \geqq R(f)-R(\varphi)$. Ebenso ist auch $R(f+\varphi) \geqq R(\varphi)-R(f)$, folglich $R(f+\varphi) \geqq |R(f)-R(\varphi)|$. Damit ist (1.) bewiesen.

Da das Quadrat einer Linearform $l^2(\xi) \equiv \left(\sum_1^n l_i \xi_i\right)^2$, wofern sie nicht identisch verschwindet, stets vom Range 1 ist, so folgt, wenn ϱ eine Konstante bedeutet:

(2.) $$p-1 \leqq R(f(\xi\xi)+\varrho l^2(\xi)) \leqq p+1.$$

Ist $R(f(\xi\xi)+\varrho l^2(\xi)) \leqq p$, dann ist jede singuläre Stelle von $f(\xi\xi)$ auch eine solche von $\theta(\xi\xi) \equiv f(\xi\xi)+\varrho l^2(\xi)$ und somit auch Nullstelle von $l(\xi)$.

Da nämlich $R(\theta) \leqq p$ ist, so haben die n Partialformen $\theta_i(\xi) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}$ wenigstens q unabhängige Nullstellen gemein, d. h. zwischen den Formen $\theta_i(\xi)$ bestehen wenigstens q lineare Gleichungen:

(3.) $$\sum_1^n \sigma_i' \theta_i(\xi) \equiv 0,\ \sum_1^n \sigma_i'' \theta_i(\xi) \equiv 0, \ldots \sum_1^n \sigma_i^{(q)} \theta_i(\xi) \equiv 0,$$

wobei die Matrix der $n \cdot q$ Größen σ vom Range q ist.

Ersetzt man in (3.) die Unbestimmte ξ durch eine singuläre Stelle, etwa ξ' von $f(\xi\xi)$, so erhält man

$$\varrho l(\xi').l(\sigma')=0,\ \varrho l(\xi').l(\sigma'')=0, \ldots \varrho l(\xi').l(\sigma^{(q)})=0,$$

somit ist entweder $l(\xi')=0$, wie behauptet, oder $l(\sigma')=l(\sigma'')=\cdots=l(\sigma^{(q)})=0$, d. h. die $\sigma', \sigma'', \ldots$ sind dann ihrerseits Nullstellen von $l(\xi)$. Alsdann nehmen aber die Identitäten (3.) die Gestalt an $f(\xi, \sigma') \equiv 0$, $f(\xi, \sigma'') \equiv 0, \ldots$, d. h. die $\sigma', \sigma'', \ldots$ sind singuläre Stellen von $f(\xi\xi)$, sie bilden somit eine Basis des singulären Gebietes von $f(\xi\xi)$, w. z. b. w.

Da $l(\xi)$ das singuläre Gebiet von f zu Nullstellen hat, so darf man setzen $l(\xi) \equiv f(\xi, \alpha)$.

Sämtliche aus $f(\xi\xi)$ durch Addierung eines vollen Quadrates hervorgehenden Formen, deren Rang $\leqq p$ ist, sind somit in der Gestalt enthalten:

$$(4.) \qquad \theta(\xi,\xi) \equiv f(\xi,\xi) + \varrho \cdot f^2(\xi,\alpha),$$

worin die Größen $\varrho, \alpha_1, \ldots$ ganz beliebige Konstanten bedeuten ($f(\alpha\alpha) \neq 0$).

Umgekehrt, jede Form des Typus $\theta(\xi\xi)$ ist vom Range $\leqq p$. — Das singuläre Gebiet von $f(\xi\xi)$ ist auch singulär für $\theta(\xi\xi)$.

Wird noch verlangt, daß $R(\theta) < p$, d. h. $= p-1$ sei, dann muß das singuläre Gebiet von $\theta(\xi\xi)$ ein $(q+1)$-gliedriges sein, d. h. zwischen den Partialformen $\theta_i(\xi)$ müssen $(q+1)$ lineare Gleichungen bestehen:

$$\sum_1^n \sigma_i' \theta_i(\xi) \equiv 0, \quad \sum_i \sigma_i'' \theta_i(\xi) \equiv 0, \ldots \sum_i \sigma_i^{(q)} \theta_i(\xi) \equiv 0, \quad \sum_i \sigma_i^{(q+1)} \theta_i(\xi) \equiv 0.$$

Nun ist $\theta_i(\xi) \equiv f_i(\xi) + \varrho f_i(\alpha) \cdot f(\xi,\alpha) \equiv \sum_{k=1}^n f_k(\xi)\{\delta_{ik} + \varrho\alpha_k f_i(\alpha)\}$, wo $\delta_{ik} = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\Big\}\begin{matrix}i=k\\i\neq k\end{matrix}$ eine lineare Verbindung der $f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots$ ist. Da diese vom Range p, die $\theta_1, \theta_2, \ldots$ dagegen nur vom Range $(p-1)$ sind, so muß die Determinante der $n \cdot n$ Kompositionskoeffizienten den Wert Null haben, d. h. es ist

$$\begin{vmatrix} \varrho\alpha_1 f_1(\alpha)+1, & \varrho\alpha_2 f_1(\alpha), \ldots & \varrho\alpha_n f_1(\alpha) \\ \varrho\alpha_1 f_2(\alpha), & \varrho\alpha_2 f_2(\alpha)+1, \ldots & \varrho\alpha_n f_2(\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \varrho\alpha_1 f_n(\alpha), & \varrho\alpha_2 f_n(\alpha), \ldots & \varrho\alpha_n f_n(\alpha)+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ergibt, wie leicht einzusehen, die Gleichung $1 + \varrho f(\alpha,\alpha) = 0$, $\varrho = -\frac{1}{f(\alpha,\alpha)}$, d. h. *unter den Formen von der Gestalt $f(\xi\xi) + \varrho f^2(\xi,\alpha)$ haben den Rang $(p-1)$ die und nur die, bei denen $\varrho = -\frac{1}{f(\alpha\alpha)}$ ist; α bleibt dabei willkürlich.*

Das singuläre Gebiet wird dann durch $(\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n)}, \alpha)$ dargestellt, es geht aus dem der Form $f(\xi\xi)$ durch Erweiterung mittels α hervor.

Setzt man $f(\xi\xi) - \frac{f^2(\xi,\alpha)}{(f\alpha,\alpha)} \equiv f'(\xi\xi)$, so daß $f(\xi\xi) \equiv \frac{f^2(\xi,\alpha)}{f(\alpha,\alpha)} + f'(\xi\xi)$ die allgemeinste Zerlegung von $f(\xi\xi)$ in ein Quadrat und eine Form des Ranges $(p-1)$ darstellt, so kann man ebenso setzen: $f'(\xi\xi) \equiv \frac{f'^2(\xi,\beta)}{f'(\beta\beta)} + f''(\xi\xi)$, wo β beliebig ($f'(\beta\beta) \neq 0$), f'' vom Range $(p-2)$ ist.

So fortfahrend, gelangt man zu der allgemeinsten Zerlegung von $f(\xi\xi)$ in eine Summe von p Quadraten:

$$(5.) \qquad f(\xi\xi) \equiv l_1^2(\xi) + l_2^2(\xi) + \cdots + l_p^2(\xi).$$

Da jedes einzelne der rechts auftretenden Quadrate die Eigenschaft

besitzt, von $f(\xi\xi)$ subtrahiert eine Form des Ranges $(p-1)$ hervorzurufen, so darf man setzen:

$$l_1^2(\xi) \equiv \frac{f^2(\xi, \alpha')}{f(\alpha', \alpha')},\ l_2^2(\xi) \equiv \frac{f^2(\xi, \alpha'')}{f(\alpha'', \alpha'')}, \dots l_p^2(\xi) \equiv \frac{f^2(\xi, \alpha^{(p)})}{f(\alpha^{(p)}, \alpha^{(p)})}$$

und

$$(6.) \qquad f(\xi\xi) \equiv \sum_{i=1}^{p} \frac{f^2(\xi, \alpha^{(i)})}{f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}.$$

Da $R\left\{f(\xi\xi) - \frac{f^2(\xi\alpha')}{f(\alpha'\alpha')}\right\} = p-1$, dagegen $R\left\{f(\xi\xi) - \frac{f^2(\xi, \alpha')}{f(\alpha', \alpha')} - \frac{f^2(\xi, \alpha'')}{f(\alpha'', \alpha'')}\right\}$ $= p-2$ ist, so muß $f(\xi, \alpha'')$ das gesamte singuläre Gebiet von $f(\xi\xi) - \frac{f^2(\xi, \alpha')}{f(\alpha', \alpha'')}$ zu Nullstellen haben, d. h. es ist $f(\alpha', \alpha'') = 0$.

Allgemein ist $f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)}) = 0, (i \neq k)$. Die n Stellen $\xi', \xi'', \dots \xi^{(q)}, \alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(p)}$ sind unabhängig untereinander, weil $f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)}) \neq 0$ für jeden Wert $i = 1, 2, \dots p$ ist.

Bestimmt man umgekehrt p Stellen $\alpha', \alpha'', \dots \alpha^{(p)}$ derart, daß $f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)}) = 0, (i \neq k), f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)}) \neq 0$, dann ist $f(\xi\xi) \equiv \sum_{1}^{p} \frac{f^2(\xi, \alpha^{(i)})}{f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$ *).

Denn setzt man $f(\xi\xi) - \sum_{1}^{p} \frac{f^2(\xi, \alpha^{(i)})}{f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \equiv H(\xi, \xi)$, so ist $H_k(\xi) \equiv f_k(\xi)$ $- \sum_{i=1}^{p} \frac{f_k(\alpha^{(i)}), f(\xi, \alpha^{(i)})}{f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$, folglich $H_k(\xi^{(\lambda)}) = 0$ für $\lambda = 1, 2, \dots q$. Desgleichen ist aber auch $H_k(\alpha^{(i)}) = 0$; d. h. $\xi', \xi'' \dots \xi^{(q)}, \alpha', \alpha'' \dots \alpha^{(p)}$ sind singuläre Stellen von $H(\xi\xi)$. Da dieselben untereinander unabhängig sind, so folgt $H(\xi\xi) \equiv 0$, w. z. b. w. Bei der Zerlegung von $f(\xi\xi)$ nach Formel (6.) ist das erste α, z. B. α' ganz beliebig zu wählen $f(\alpha'\alpha') \neq 0$. Als erste der Linearformen kann man also eine beliebige Komposition der Linearformen $f_1, f_2, \dots f_n$ wählen — bis auf einen bestimmten konstanten Faktor.

Ist $p = n$, so kann jede Linearform in die Gestalt $f(\xi, \alpha)$ gebracht werden, d. h. bei der Zerlegung einer *allgemeinen* quadratischen Form darf man die erste Linearform beliebig wählen bis auf einen konstanten Faktor, der bestimmt ist.

Die zweite Linearform ist ebenfalls von der Gestalt $f(\xi, \alpha'')$, jedoch mit der Beschränkung $f(\alpha', \alpha'') = 0$, $f(\alpha'', \alpha'') \neq 0$ usf. Jedes neue Quadrat

---

*) Man kann auch durch direkte Rechnung zeigen, daß die Gleichungen $f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(k)}) = 0$ und die Ungleichungen $f(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)}) \neq 0$ miteinander nicht unvereinbar sind.

verkleinert, von $f(\xi\xi)$ subtrahiert, den Rang um 1, erweitert das singuläre Gebiet um eine Dimension.

Werden die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Beschränkung unterworfen, einer linearen Gleichung $u(\xi) = 0$ zu genügen, so geht aus $f(\xi\xi)$ nach Elimination einer der in $u(\xi)$ vorkommenden Unbestimmten eine Form von nicht mehr als $(n-1)$ Unbestimmten hervor. Der Rang aller dieser Formen ist der gleiche.

Man darf deswegen von dem Range des Schnittes von $f(\xi, \xi)$ mittels $u(\xi) = 0 : f(\xi\xi)$ reden.
$\quad\quad\quad

Bemerkung über die Zusammensetzung der algebraischen Zahlkörper.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

1.) Sind G_1, G_2 relativ *Galois*sche Körper eines Bereiches, dessen Relativgrade relativ prim gegeneinander ausfallen, dann ist die Zerlegung einer Primgröße im zusammengesetzten Körper G durch die Zerlegungen in G_1 und G_2 a priori bestimmt*).

2.) Es seien jetzt G_1, G_2 absolut *Galois*sche Körper vom Grade n_1 bezw. n_2. Die Körperdiskriminanten sollen durch d_1, d_2 bezeichnet werden und der zusammengesetzte Körper G habe den Grad n. Es sollen ferner für die Primzahl p in G_1 bzw. G_2 bzw. G die Zerlegungen

$$p = (\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2' \cdots \mathfrak{p}_{e_1}')^{g_1}, \quad p = (\mathfrak{p}_1'' \mathfrak{p}_2'' \cdots \mathfrak{p}_{e_2}'')^{g_2}, \quad p = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_e)^g$$

statthaben, wo die eingeklammerten Primideale voneinander verschieden und vom Grade f_1 bzw. f_2 bzw. f sind. Für den Fall $(d_1, d_2) = 1$ wird die Zerlegung einer Primzahl wieder a priori bestimmt durch die Relationen

$$(1.) \qquad g = g_1 g_2, \quad (2.) \quad f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}, \quad (3.) \quad e = e_1 e_2 (f_1, f_2).$$

3.) Da $(g_1, g_2) = 1$ ausfällt, bekommt man zunächst (1)**).

---

*) Über zusammengesetzte Zahlkörper. Math. Annalen Bd. 77, S. 357—361. Es ist zu bemerken, daß der dortige Satz III aus *Hensels* Untersuchungen auch für Relativkörper folgt. Unsere Prämisse a. a. O. ist sicher erfüllt im Falle $(g_i, p) = 1$, sie fordert also streng genommen weniger als diese *Hensel*sche Annahme. Die Behauptung der Fußnote *) S. 358, daß die Trägheitsgruppe vom Index unabhängig sei, stammt von *H. Weber* (Math. Annalen Bd. 67, S. 43). Der Beweis ist jedoch unrichtig.

**) Vgl. a. a. O.

Aus der *Dedekind*schen Regel folgt

$$f \equiv 0 \,(\text{mod. } f_i) \quad {}^{(i=1,2)},$$

also

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}\, t, \; t \text{ rational ganz.}$$

Ohne Anwendung dieser Regel kann das wie folgt bewiesen werden. Wenn das Primideal $\mathfrak{p}$ in einem algebraischen Zahlkörper K den Grad μ besitzt, so wird die Kongruenz

$$x^{p^\alpha} \equiv x \,(\text{mod. } \mathfrak{p})$$

dann und nur dann durch jede ganze Zahl von K erfüllt, wenn α ein Vielfaches von μ ist. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges der Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_e$ des Körpers G, dasselbe ist ein Teiler der Primideale $\mathfrak{p}'$ bzw. $\mathfrak{p}''$ der Körper G_1 bzw. G_2. Nachdem die Kongruenz

$$x^{p^f} \equiv x \,(\text{mod. } \mathfrak{P}) \tag{4.}$$

durch jede ganze Zahl von G erfüllt ist, wird für jede ganze Zahl von G_1 bzw. G_2

$$x^{p^f} \equiv x \,(\text{mod. } \mathfrak{p}'), \text{ bzw. } x^{p^f} \equiv x \,(\text{mod. } \mathfrak{p}''),$$

d. h. f ist durch f_1 bzw. f_2 teilbar.

4.) Für den Fall $(d_1, d_2) = 1$ bestimmen die Zahlen

$$\alpha_k \beta_l \qquad {}^{(k=1,2,\ldots,n_1)}_{(l=1,2,\ldots,n_2)}$$

ein Fundamentalsystem des Körpers G, wenn die Zahlen α_k bzw. β_l ein Fundamentalsystem von G_1 bzw. G_2 bilden. Infolgedessen hat jede ganze Zahl ω von G die Gestalt

$$\omega = \sum_{kl} r_{kl}\, \alpha_k \beta_l, \tag{5.}$$

wo die Zahlen r_{kl} rat. ganze Zahlen bedeuten, welche von ω abhängen. Aus (5.) folgen

$$\omega^{p^{\frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}}} \equiv \omega \,(\text{mod. } \mathfrak{P}), \quad \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)} \equiv 0 \,(\text{mod. } f),$$

es ist also

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}. \tag{2.}$$

In dem betrachteten Falle ist noch $n = n_1 n_2$, und so folgt aus

$$n = efg, \; n_1 = e_1 f_1 g_1, \; n_2 = e_2 f_2 g_2$$

die zu beweisende Relation

(3.) $$e = e_1 e_2 (f_1, f_2)^*).$$

5.) Man kann leicht auch den Satz beweisen: Ist $n = n_1 n_2$ und g_1 oder g_2 gleich Eins, dann wird

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

6.) Benutzt man die Ergebnisse aus *Hensel*s allgemeinen Untersuchungen über zusammengesetzte Körper**), so läßt sich der folgende Satz beweisen. Wenn $(g_1, g_2) = 1$ und $(g_i, p) = 1$ $(i = 1, 2)$ ausfallen, dann wird

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}.$$

Aus den bezüglichen Abhandlungen folgt, daß jede ganze Zahl ω des Körpers G die Relation

(6.) $$\omega \equiv \sum_s r_s \alpha_s \beta_s + \sum_t r_t \gamma_t \pmod{p}$$

erfüllt; in dieser Formel bedeuten α_s bzw. β_s bzw. γ_t gewisse ganze Zahlen der Körper G_1 bzw. G_2 bzw. G, die Zahlen r_s, r_t sind rationale ganze Zahlen, welche von ω abhängen, die Zahlen γ_t enthalten eine positive gebrochene Potenz von p***). Infolgedessen sind die Zahlen γ_t durch sämtliche Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_e$ teilbar. Wenn ein beliebiges von ihnen mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet wird, so bekommt man

(6*.) $$\omega \equiv \sum_s r_s \alpha_s \beta_s \pmod{\mathfrak{P}},$$

$$\omega^{p^{\frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}}} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{P}},$$

woraus

$$f = \frac{f_1 f_2}{(f_1, f_2)}$$

folgt.

---

*) Wie aus dem Punkte 7.) folgt, bleibt der Satz auch ohne diese Annahme richtig.

**) Die folgenden Abhandlungen kommen hier in Betracht. 1.) Über Gattungen, welche durch Composition etc. Dieses Journal Bd. 105, S. 329—344. 2.) Über die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche. Dieses Journal Bd. 117, S. 333—345. 3.) Über diejenigen algebraischen Körper etc. Dieses Journal Bd. 120, S. 99—108.

***) Man muß nur bedenken, daß im Falle $(g_1, g_2) = 1$, $0 \leqq a_i < g_i$ die Summe $\frac{a_1}{g_1} + \frac{a_2}{g_2}$ nur dann eine ganze rationale Zahl sein kann, wenn die rationalen ganzen Zahlen $a_i = 0$ sind.

7.) Der jetzt bewiesene Satz ist mutatis mutandis auch für Relativkörper gültig. Es besteht zunächst eine zu (6.) analoge Formel. Ist ferner G im Bereiche Γ ein relativ *Galois*scher Körper, $\mathfrak{P}$ ein Primideal vom Relativgrade f und $\mathfrak{p}$ das Primideal in Γ, welches durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist und den Grad v besitzt, so ist die absolute Norm

$$N(\mathfrak{P}) = p^{vf}.$$

Auch der Satz von 5.) kann für Relativkörper erweitert werden*). Der Beweis des Satzes von 2.) besteht dagegen für Relativkörper nicht.

---

*) Aus dieser Verallgemeinerung ist ersichtlich, daß die Annahme $n = n_1 n_2$ *unnötig* wird. Ist nämlich der Durchschnitt $\bar{G}$ von G_1 und G_2 ein Körper ν-ten Grades, so ist für die Relativgrade in Bezug auf $\bar{G}$ die Relation $\frac{n_1 n_2}{\nu^2} = \frac{n_1}{\nu} \cdot \frac{n_2}{\nu}$ *immer* erfüllt.